

DOTTORATO DI RICERCA  
in  
STORIA DELLE SCIENZE E DELLE TECNICHE COSTRUTTIVE  
VI ciclo

ANTONIO BECCHI

I CRITERI DI PLASTICITÀ:  
CENTO ANNI DI DIBATTITO (1864-1964)

Relatore  
Prof. EDOARDO BENVENUTO

Coordinatore Dottorato  
Prof. SALVATORE DI PASQUALE

FIRENZE 1994

“Ich habe den Weg zur Wissenschaft gemacht wie Hunde die mit ihren Herrn spazieren gehen, hundertmal dasselbe vorwärts und rückwärts.”

G.C.Lichtenberg

A Silvia, Pippo, Sergio e  
Vanni, *Wanderjahremeister*

### *Ringraziamenti*

Ringrazio tutti coloro che mi hanno aiutato a portare a compimento il presente lavoro. Desidero ricordare, in particolare: Andreas Eckart, Beate Krondorf, Johanna Sandberg, Peter Hinn e Sabine Genters, che mi hanno offerto ospitalità, amicizia e aiuto durante i numerosi soggiorni di studio trascorsi a Göttingen; Andrea Grillo, Anna Pagnini, AnnaMaria Berta, Chiara Krawietz, Federico Foce, Francesco Pagnini, Giampiero Bof, Giovanni Bonaccorti, Joseph Giampapa per le intense discussioni e i proficui scambi di idee; Andreas Kahlow e Karl-Eugen Kurrer - con i quali condivido interessi e ideali di ricerca -, che mi hanno consentito di anticipare i risultati della tesi in un seminario di studio presso il Wissenschaftszentrum di Berlino; Salvatore Di Pasquale, che mi ha indicato spunti essenziali per l'elaborazione del presente lavoro; Orietta Pedemonte, esempio di scienza e di sapienza, che mi ha guidato e incoraggiato; Edoardo Benvenuto, mio Maestro non solo nell'ambito della Scienza delle Costruzioni; Chilli Badano, compagna discreta e intelligente, che ha condiviso con me gioie e preoccupazioni di questo triennio di studio intenso e appassionato.

## INDICE

PREMESSA	pag. 1
INTRODUZIONE	pag. 4
CAPITOLO I. DALL'IDRODINAMICA ALL'“HYDROSTÉRÉODYNAMIQUE”.	
1.1. Le “Strong Reasons” di J.C.Maxwell	pag. 10
1.2. Una “branche nouvelle de la Mécanique”	pag. 11
1.3. Il contributo di Saint-Venant	pag. 17
1.4. La “doctrine de la continuité”	pag. 20
1.5. La diffusione della “doctrine de la continuité”	pag. 32
1.6. La proposta di Huber	pag. 35
CAPITOLO II. IL CONTRIBUTO DELLA SCUOLA TEDESCA.	
2.1. Von Mises, 1913	pag. 41
2.2. Il dibattito sull'interpretazione energetica del criterio di plasticità	pag. 49
2.3. La memoria di von Mises sulla plasticità dei cristalli	pag. 52
2.4. La “crisi della meccanica”	pag. 62
2.5. Burzynski	pag. 64
2.6. Olszak e Urbanowsky	pag. 68
CAPITOLO III. VERSO UNA NUOVA TEORIA DELLA PLASTICITÀ.	
3.1. Le “strutture sensibili” di Smekal	pag. 76
3.2. Il tentativo di “unificazione” di Kondo	pag. 81
3.3. Prager e la “new theory of plasticity”	pag. 84
3.4. La critica di Truesdell	pag. 88
3.5. “Rheologists and Dislocationists”	pag. 100
3.6. La posizione di Drucker	pag. 106
3.7. Considerazioni conclusive	pag. 112
Bibliografia	pag. 115



## PREMESSA

Il presente lavoro è frutto di una ricerca sull'evoluzione del concetto di criterio di plasticità. Non si tratta, quindi, di un regesto delle singole proposte formulate nel periodo indicato, ma di una rilettura del dibattito sorto intorno al problema della definizione del limite elastico, nella quale si è cercato di evidenziare l'affinità delle ricerche originarie con gli studi fioriti intorno agli anni '50 del nostro secolo.

L'analisi storica ci ha fatto da guida e l'interesse precipuo è stato quello di offrire un'interpretazione personale della *vexata quaestio*, confortata da un'analisi puntuale delle fonti. Nel periodo relativamente breve di storia della meccanica che è stato sottoposto ad indagine il tempo si è potuto distendere, per far affiorare ciò che la fretta aveva ridotto ad uno schema univoco e per cogliere influssi e analogie che contribuiscono a dare corpo all'evoluzione della materia, corpo che troppo spesso è stato ridotto a scheletro per neutralizzare le scabrosità della storia e imporre l'“essenziale” dei concetti<sup>1</sup>.

Intenti analitici, dunque, non disgiunti da precise intenzionalità sintetiche, per evitare la civetteria della generalità e la pedanteria filologica del frammento<sup>2</sup>. Le ricerche sul criterio di plasticità e la lunga polemica che ha accompagnato la sua puntuale definizione all'interno della meccanica del continuo modernamente intesa sono, infatti, paradigma di problemi più radicali che coinvolgono la storia del pensiero, alla quale, ne siamo certi, deve essere ricondotta qualsiasi manifestazione particolare nell'ambito delle cosiddette scienze esatte e delle relative applicazioni tecniche. Fedeli a questa linea abbiamo inserito alcune digressioni che, a nostro parere, recuperano la concretezza della genesi storica superando le anodine interpretazioni sedimentatesi nel corso del tempo.

A questo proposito il dialogo serrato con i maggiori contributi di Clifford Truesdell vuole essere un omaggio a chi più di ogni altro si è prodigato per affermare

---

<sup>1</sup> la simbologia matematica non è stata, volutamente, uniformata, per mettere in evidenza l'evoluzione che gli stessi simboli rivelano assai meglio delle parole.

<sup>2</sup> sulla “coquetterie” della generalità cfr. l'osservazione di R.Marcolongo in R.Marcolongo, *Relatività*, Messina, 1923, p. VII.

un modo nuovo di intendere la storia della scienza<sup>3</sup>. La sua prosa elengante, sobria e tagliente, sempre al servizio di un pensiero cristallino che non conosce i compromessi che si celano nel chiaroscuro del linguaggio, ha il merito di aver saputo risvegliare interessi e sollecitare discussioni<sup>4</sup>. Non nascondiamo alcune perplessità rispetto ai

---

<sup>3</sup> In un passo autobiografico Truesdell ricorda la genesi del suo *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics* (cfr. *Jour. Rat. Mech. Anal.*, **1**, 1952) che ha inaugurato una lunga serie di pubblicazioni sull'argomento. Invitato da R.von Mises a scrivere un "survey on the mechanics of deformable masses", Truesdell segue il consiglio di Kurt Friedrichs di prestare attenzione alle fonti originarie: "He was right. As I began to revise my work, I tried to study contributions from the nineteenth century because I had learned that in that period some mathematicians and physicists of the first rank had devoted part of their attention to continuum mechanics, while more recent studies, such as those v. Mises reviewed, came after most major mathematicians and physicists had abandoned classical continuum mechanics in favour of pure mathematics, relativity, or quantum mechanics. I tried to read some historical works, notably Todhunter and Pearson's *History of the theory of elasticity*, but I found them long on approximations and ugly formulae, opaque and tedious, short on fundamental thinking. (...). My view was the opposite. I searched for the foundations of continuum theories of all kinds, in kinematics, in dynamics, in variety and nature of response to strain, and in classification that a student could use in creating and appraising new theories of materials." (cfr. C.Truesdell, Cauchy and the modern mechanics of continua, *Revue Hist. Sci.*, **45**, 1992, pp. 8-9).

<sup>4</sup> Meraviglia che un insegnamento tanto appassionato e instancabilmente divulgato attraverso pubblicazioni di ampio respiro, non abbia avuto il seguito che meritava nell'ambito della storia della meccanica. Pochi autori hanno saputo coglierne lo spirito innovativo: ricordiamo, in particolare, I.Szabò e la sua *Geschichte der Mechanischen Prinzipien* (Basel, 1977), e E.Benvenuto con *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Firenze, 1981 (anche idem, *An Introduction to the History of Structural Mechanics*, New York, 1990). Le due opere risultano profondamente differenti, quasi a confermare la validità dell'insegnamento di Truesdell, che favorisce la formazione di una propria originale impostazione di ricerca, piuttosto che imporne una. Il testo di Szabó, animato soprattutto da intenti didattici, ha il difetto di dipendere in modo vistoso dall'impostazione truesdelliana. I testi di

suoi scritti più apertamente polemici, ma siamo convinti che anche il nostro dissenso si è nutrito del suo insegnamento, è cresciuto e si è fortificato grazie alla straordinaria libertà di pensiero che le sue ricerche ci hanno mostrato.

---

Benvenuto, invece, rivalutano i temi che Truesdell ha pregiudizialmente escluso dai suoi interessi. Emblematici risultano due *Lieblingsthemen* di Benvenuto, la teoria molecolare dell'elasticità e lo studio storico-critico sulle *cause* della resistenza dei materiali; su entrambi lo studioso americano aveva espresso giudizi perentori ai quali Benvenuto ha saputo dare una risposta rigorosa e convincente. Le opere di Szabó e Benvenuto, non a caso ammirate da Truesdell che si è adoperato per favorirne la conoscenza, rappresentano una precisa indicazione di come debba procedere la riflessione storica ed epistemologica sullo sviluppo della meccanica dei materiali e delle strutture.

## INTRODUZIONE

La nascita di una nuova *rational mechanics of materials*, consapevole delle straordinarie possibilità ad essa offerte dalla nozione generale di equazione costitutiva<sup>5</sup>, si accompagna ad un acceso dibattito sugli statuti della teoria della plasticità, esclusa dal programma di rigorizzazione che intendeva riportare la *resistentia solidorum* nell'alveo delle scienze *more geometrico demonstratae*<sup>6</sup>. Nel momento in cui poteva entrare a pieno diritto nell'ambito della scienza dei materiali, superando il grave ritardo col quale aveva seguito l'evoluzione della teoria dell'elasticità, la teoria della plasticità si trova nuovamente ai margini, costretta a rivedere la sua struttura formale e a difendersi da obiezioni radicali che paiono mettere in dubbio tutto il suo apparato teoretico-sperimentale. Sorte inaspettata per una dottrina che sembrava aver dato finalmente corpo alle domande archetipe dell'arte del costruire, riguardanti le risorse limite del materiale e le modalità di ottimizzazione strutturale.

Eppure non erano mancate, al riguardo, ricerche di grande valore. La riflessione sulle modalità fisico-meccaniche che regolano la resistenza limite dei

---

<sup>5</sup> per il concetto di equazione costitutiva cfr. C.Truesdell, *Sketch for a history of constitutive relations*, *Proc. VIII Int. Congr. Rheology* (Naples, Sept. 1-5, 1980), **1**, 1-27.

<sup>6</sup> C.Truesdell, *Rational mechanics of materials*, in *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*, Berlin-Heidelberg-New York, 1966, p. 19: "Once the core of the classical mechanics of materials had been straightened and annealed by these clear and embracing concepts and definitions, it became a mathematical science after the manner of geometry".

materiali, assume forma compiuta e veste di ricerca autonoma sin dai *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze* di Galileo Galilei (1638). Le prime due Giornate sviluppano i temi della *resistenza dei corpi ad essere spezzati* e delle ipotesi *sulla natura della coesione*, proponendo soluzioni inscritte in un ambizioso programma orientato a stabilire la meccanica dei solidi come rigorosa scienza razionale, formalmente distinta dalla geometria. La *resistentia solidorum* è ricondotta a suggestive analogie idrostatiche e la forza del vacuo è chiamata in causa per spiegare la *cohaesio corporum*: “Così, una verga di rame potendo reggersi sino alla lunghezza di quattro mila ottocento un braccio, la resistenza che ella trova dependente dal vacuo, rispetto al restante, è tanta, quanto importa il peso di una verga d'acqua lunga braccia diciotto e grossa quanto quella stessa di rame”. Respinta la dottrina ilemorfistica con cui Aristotele aveva risolto secondo categorie predicative l'enigma della sostanza materiale, l'atomismo torna ad essere prezioso riferimento. Lo dimostra Donato Rossetti, proponendo una nuova teoria della resistenza a partire dal concetto di *polo*, inteso come centro di un campo di forze attrattive e repulsive che definisce una *sfera di energia*<sup>7</sup>. Le variazioni energetiche permettono di spiegare i differenti valori di resistenza che si riscontrano nei materiali e di stabilire la proporzionalità tra forza elastica e deformazione, dalla quale deriva un primo larvato criterio di rottura per “massima dilatazione”<sup>8</sup>. Nell'ultima delle Trentuno *Queries* che

---

<sup>7</sup> D.Rossetti, *Composizione e passioni de' vetri*, Livorno, 1671, p. 2. Per un'analisi approfondita degli scritti di Rossetti cfr. E.Benvenuto, *An Introduction to the History of Structural Mechanics*, 1, New York, 1990, p. 209 e ssgg.

<sup>8</sup> Cfr. E.Benvenuto, *La dottrina galileiana sulla resistenza dei solidi*, in AAVV, *La cultura filosofica e scientifica*, Milano, 1989, 2, p. 921: “La considerazione della sfera di energia sta alla base di un possibile *criterio di rottura*, poiché si intuisce che la rottura del corpo avviene quando lo si deforma a tal segno da separare gli atomi tra loro a distanza superiore al raggio della sfera di energia afferente ai loro poli. Si tratta dunque di un criterio di rottura per «massima dilatazione», che per la prima volta entra nella meccanica dei solidi (...). Infine, l'ipotesi di atomi sferici o quasi, dotati di poli sulla superficie esterna, può rendere conto delle *proprietà dei materiali duttili* e di numerosi fenomeni connessi alla *plasticità*. (...). Secondo Rossetti, la configurazione di riposo del corpo

accompagnano l'Ottica di Newton (1706) la “natural appetenza” del polista Rossetti si trasforma nella *elective attraction* interatomica, in seguito interpretata da P. van Musschenbroek come *vis interna attrahens*, responsabile della *cohaerentia corporum firmorum*<sup>9</sup>. È ormai aperta la strada per la grande sintesi della *Theoria Philosophiae Naturalis* di R.G.Boscovich (1758)<sup>10</sup>, nella quale si cerca di offrire un quadro unitario che consenta di racchiudere in un'unica analogia i tre principi *actuosi* individuati da Newton: “gravitas, et causa fermentationis et cohaerentiae corporum”. La *clavis universalis* della nuova teoria è rappresentata dalla *lex virium*, secondo la quale la materia deve ritenersi costituita da un insieme di punti indivisibili ed inestesi soggetti a forze di attrazione e repulsione funzioni delle reciproche distanze: in base ad essa è possibile individuare i limiti di coesione e non-coesione, l'impenetrabilità e l'attrazione gravitazionale.

Su un altro versante d'indagine, il modello elementare ma efficace della trave inflessa dà avvio a un dibattito appassionato che coinvolge i maggiori scienziati del XVII e XVIII secolo, impegnati a definire le modalità di rottura della trave e le sue possibili cause. Galileo, Leibniz, Mariotte, Parent, Euler e i fratelli Bernoulli contribuiscono ad affinare i modelli di riferimento e a chiarire le condizioni statiche e cinematiche del problema. Nel contempo le ricerche sperimentali di Du Hamel e Girard, offrono conferme significative e altrettanto importanti smentite alle teorie impostate in precedenza. Nonostante il fondamentale *Essai sur une application de*

---

elastico è definita dall'equilibrio tra le «energie» di appetenza e aborrimento: equilibrio che vien turbato dalla deformazione del corpo, sicché insorge la «forza di molla» proporzionale alla deformazione stessa.”

<sup>9</sup> I.Newton, *Optice*, 1706; la XXXI Query della seconda edizione inglese (1717) corrisponde alla XXIII Quaestio dell'edizione latina. Anche P. van Musschenbroek, *Introductio ad cohaerentia corporum firmorum*, Leida, 1729.

<sup>10</sup> Su questo tema chi scrive si è già soffermato nell'ambito della tesi di laurea (A.Becchi, *Radici storiche della molecolare dell'elasticità, con particolare riguardo alla Theoria Philosophiae Naturalis di R.G.Boscovich*, Genova, 1988), della quale questo lavoro costituisce il naturale proseguimento.

*maximis et minimis...*(1773) dell'*Ingenieur du Roi* Augustin Coulomb, che chiarisce il ruolo dell'attrito interno sul fenomeno della rottura, il problema resta incerto persino nei suoi contorni generali, ma i tentativi di soluzione arricchiscono nuovi settori d'indagine, aprono inaspettate prospettive, stimolano feconde controversie.

Col trionfo della teoria dell'elasticità si assiste ad un progressivo abbandono delle istanze originarie, confinate in sterili dibattiti che contrappongono il criterio che attribuisce la rottura alle tensioni massime, a quello che l'addebita alle massime deformazioni<sup>11</sup>. La necessaria modellazione matematica utilizzata nel delicato

---

<sup>11</sup> Essi fanno proprie le due ipotesi che da secoli ormai si contendevano il campo e delle quali è difficile individuare con precisione le origini. Secondo Saint-Venant la prima risale a Galileo e Leibniz. Nel corso del secolo XIX essa gode ancora di molto favore e annovera tra i suoi sostenitori Lamé e Clebsch. A quest'ultimo, in particolare, la letteratura posteriore è solita far riferimento (cfr. A.Clebsch, *Theorie der Elasticität fester Körper*, Leipzig, 1862). Saint-Venant sostiene la seconda ipotesi nelle *Leçons de mécanique appliquée* del 1837-'38, e ritorna numerose volte sull'argomento per sottolinearne la legittimità (in particolare nella nota al §37 dell'edizione francese- 1883 - della *Theorie* di Clebsch). Lui stesso ricorda che già Mariotte aveva sostenuto “que les parties étendues ne rompent que parce que leur extension vien à dépasser une certain proportion” (Mariotte, *Traité du mouvement des eaux*, V Partie, 1682) e aggiunge che osservazioni analoghe sono svolte da Poncelet (J.V.Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale*, 2<sup>ed.</sup> corrigée, Metz-Paris, 1839); quest'ultimo è il primo a fornire un'accurata rappresentazione grafica della relazione tensione /deformazione, a distinguere elasticità di forma e di volume e a determinare empiricamente il valore limite del lavoro elastico. Riguardo il rapporto tra le due ipotesi, Saint-Venant precisa che (nota al *Clebsch*, p. 253): “Ces deux manières donnent les mêmes résultats et peuvent être employées indifféremment l'une ou l'autre dans les cas où les solides, de forme allongée, ne sont que fléchis en même temps que tirés ou pressés dans le sens de leur longueur, leurs faces latérales étant libres, de sorte que chaque fibre s'allonge ou s'accourcis comme un prisme isolé; et les plus grandes dilatations restent, partout, proportionnelles aux plus grandes tensions de mêmes directions. Mais il n'en est plus de même, et les équations que fournissent ces deux manières d'opérer sont très différentes, quand il y a (comme on verra) des torsions, ou des glissements transversaux et longitudinaux; et même, déjà comme je l'ai montré en 1838 par des exemples (*Cours lithographié de l'Ecole des ponts et chaussées*), lorsqu'il y a simplement des tractions dans plusieurs sens à la

passaggio dall'esperienza alla *sensata esperienza*, adombra l'indispensabile ruolo regolativo delle “imperfezioni della materia”, e il conoscere *intensive*, che nell'interpretazione galileiana accomunava la conoscenza umana alla perfezione divina, non riesce a conciliarsi col sapere *extensive*, inesauribile termine di confronto tra realtà e sua interpretazione<sup>12</sup>. La stagione aurea della teoria dell'elasticità fonda il

---

fois.” Risale sicuramente a Coulomb (*op. cit.*, 1773) il criterio della tensione tangenziale massima.

<sup>12</sup> A questo proposito, persino la teoria dell'elasticità aveva avuto difficoltà ad imporsi. Si pensi alle obiezioni rivolte da L.Poinsot, illustre membro dell'Académie des Sciences e docente presso l'École Polytechnique, ai suoi padri fondatori, colpevoli di aver definito delle “pressions obliques: cela n'est pas pur, une pression est toujours normale”. Cfr. J.Bertrand, “Notice sur Louis Poinsot”, in *Éléments de Statique*, XII ed. Paris, 1877, pp. IX-XXVIII: “Pour traiter mathématiquement des corps solides, il fallait tout d'abord, suivant lui, qu'on voulût bien en accepter une définition mathématique. «Ma canne, disait-il souvent, n'est pas un corps solide; non-seulement elle peut rompre, mais elle plie, ce qui est cent fois pis». Deux molécules d'un corps solide sont placées par la rigidité à distance invariable l'une de l'autre; nulle force n'est capable de les écarter ou de les rapprocher; nulle influence ne peut les faire vibrer. Les corps élastiques ou ductiles ne sont pas des solides; leur définition grossière ne peut s'exprimer par des équations; elle est incompatible avec la pureté géométrique. Le vrai géomètre doit s'établir solidement sur un terrain inébranlable et ne pas heurter ses instruments délicats à une réalité confuse et mal définie qui se dérobe et se dissipe quand on veut le serrer de près. (...). Curieux de la théorie des corps solides, il la séparait entièrement de celle des corps élastiques; ni Navier, ni Poisson, ni Cauchy, ni Lamé, pour lequel il eut toujours une si haute estime, n'ont réussi à lui faire discuter leurs principes [segue passo citato nel testo]”.

D'altra parte la ricerca sperimentale si era dimostrata incapace di interpretare efficacemente i risultati raggiunti, pur restando l'unica guida sicura nell'analisi del comportamento limite del materiale. T.Tredgold, nell'Introduzione al suo *Practical essay on the Strength of cast iron* (1822), meticolosa collezione di nuovi esperimenti e regole pratiche, descrive la sconcertante situazione sul tema nei primi anni del secolo XIX, allorquando la scarsa applicabilità di molte formulazioni teoriche favoriva l'opinione che “the stability of a building is inversely proportional to the science of the builder.” (T.Tredgold, *A practical essay on the strength of cast iron*, London 1822, p. 2). L'espressione

suo successo sulla *epoché* imposta ai problemi sollevati dal comportamento limite dei materiali. Vi è una stretta analogia tra questo primo atto di marginalizzazione e quello verificatosi un secolo più tardi all'interno del progetto di riforma della meccanica del continuo. In entrambi i casi prevalgono le condizioni imposte dal modello di riferimento sugli interrogativi irrisolti sollecitati dall'osservazione dei materiali reali. La teoria molecolare prima e la teoria del potenziale elastico di Green, poi, non riescono a descrivere la singolarità dell'evento di snervamento o di rottura. La peculiarità dell'istante nel quale la materia cede alle sollecitazioni esterne mette a repentaglio l'auspicata generalità di una teoria, sembra, anzi, negare la possibilità che se ne possa formulare una che faccia a meno di un ingombrante postulato<sup>13</sup>.

---

citata dall'autore è tratta dall' *Ency. Method. Dict. Architecture*, alla voce *Equilibre*. Merita sottolineare che la posizione di Tredgold smentisce la consueta immagine del *practical man* anglosassone. Dopo aver illustrato i danni provocati da costruttori digiuni di cognizioni fisico-meccaniche relative ai materiali impiegati, l'autore aggiunge: "People of this kind generally imagine that a large piece of iron is almost of infinite strength, and they have a like indistinct notion of pressure. The dimensions of the most important parts of structures are too often fixed by guess or chance; and the person who calculates the value of materials to the fraction of a penny, seldom if ever attempts to estimate their power, or the stress to which they will be exposed. The manner in which the resistance of materials has been treated by most of our common mechanical writers, has also, in some degree, misled such practical men as were desirous of proceeding upon sure ground (...)."

<sup>13</sup> L'adozione di un criterio di snervamento o di rottura rappresenta un problema ineludibile per le teorie classiche della *resistentia solidorum*. Cfr., ad esempio, l'osservazione di P.Podio-Guidugli (P.Podio-Guidugli, *Il criterio di snervamento della sottoenergia, Omaggio a G.Ceradini*, Univ. La Sapienza, Roma 1988, p.559): "In elasticità classica, cioè nella teoria lineare della deformazione di corpi elastici isotropi, la scelta di un criterio di snervamento introduce un limite di applicabilità della teoria, stabilendone una qualche corrispondenza con alcune delle risultanze sperimentali relative all'evento di «prima plasticizzazione»." In nota si aggiunge che "l'introduzione di un criterio di snervamento rende altresì più ardua (ma fortunatamente non impossibile!) la falsificabilità à la Popper della teoria classica dell'elasticità."

## CAPITOLO I

### DALL'IDRODINAMICA ALL' "HYDROSTÉRÉODYNAMIQUE"

#### 1.1. Le "strong reasons" di J.C.Maxwell.

Il 18 dicembre 1856, in una lettera indirizzata a W.Thomson, Maxwell descrive per la prima volta il *criterio di plasticità* attribuito in seguito a von Mises<sup>14</sup>. Definito il lavoro distortente e quello di condensazione, l'autore scozzese propone di utilizzare l'*old word 'Resilience'* per individuare il lavoro necessario a superare il limite elastico, distinguendo la *cubical resilience* ( $R_1$ ) dalla *resilience of rigidity* ( $R_2$ ), riferite, rispettivamente, al lavoro necessario a modificare in modo permanente la densità del corpo o a produrre una sua variazione permanente di forma. Poste queste sintetiche premesse Maxwell conclude di avere *strong reasons* per ritenere che lo snervamento corrisponda alla resilienza  $R_2$ . La condizione di snervamento, quindi, può essere scritta nella forma seguente:

---

<sup>14</sup> Maxwell non tornerà più sull'argomento e il suo criterio verrà riscoperto alla fine degli anni Trenta grazie alla pubblicazione del volume *Origins of Clerk Maxwell's Electric Ideas*, Cambridge, 1937; tuttavia ancora nel 1952 C.Truesdell (*The mechanical foundations...*, cit. p. 208) attribuisce questa condizione a Huber, e confessa di non aver potuto consultare neppure la memoria di quest'ultimo. Soltanto l'anno successivo, nelle "Corrections and additions to «The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics»" (*JRMA*, 2, 1953, p. 602), precisa: "It was proposed in the same form and in the same connection by Maxwell in his letter of 18 dec. 1856 to Lord Kelvin". Nello stesso anno questa attribuzione sarà confermata da S.Timoshenko nella *History of strength of materials* (New York, 1953, p. 369). Riguardo R. von Mises cfr. l'articolo, *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*, *Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen*, 1913, 582-592.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta < R_2$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$ , indicano le deformazioni principali.

Per il lettore attuale è difficile apprezzare l'efficace concisione di questa formula. Quanto sopra illustrato, infatti, è oggi considerato ovvio: il criterio di plasticità è funzione della componente deviatorica del tensore delle tensioni, nell'ipotesi - valida in generale per molti materiali - che lo snervamento non dipenda in modo significativo dalla componente sferica. Eppure l'espressione fornita da Maxwell merita grande attenzione: in essa si può scorgere la traccia di un lungo e tormentato dibattito, rispetto al quale il criterio *alla von Mises* rappresenta un semplice corollario. Molteplici considerazioni, teoriche e sperimentali, infatti, inducono Maxwell a ritenere che la condizione di snervamento debba essere funzione della componente distorcente del lavoro di deformazione. Riferimenti apparentemente eterogenei e marginali, che gli permettono di superare l'impasse nel quale si attarderanno qualche anno più tardi gli autori francesi e che consentiranno di giungere ad una soluzione analoga soltanto nel 1904<sup>15</sup>. Meccanica dei fluidi e dei terreni, controversia sulle costanti elastiche, dibattiti sull'*unità costitutiva* della materia e sulle sue proprietà fisico-meccaniche, fanno da sfondo alla nascente teoria della plasticità e danno l'impronta alla sua evoluzione successiva. L'analisi di questi riferimenti originari, ben presto trascurati anche da chi avrebbe potuto trarne preziose indicazioni metodologiche per le proprie ricerche, ci consentirà di evitare frettolose semplificazioni e di evidenziare alcune istanze critiche rimaste disattese.

### 1.2. Una “*branche nouvelle de la Mécanique.*”

Per comprendere appieno il significato della formula di Maxwell occorre riconsiderare i fondamentali studi che hanno consentito il formarsi di una *branche*

---

<sup>15</sup> M.T. Huber, Il lavoro specifico di deformazione come misura dello sforzo del materiale, (testo in polacco), *Czasopismo Techniczne* (Periodico tecnico), Lwow, 1904; anche *PISMA, II*, Varsavia 1956, 3-20.

*nouvelle de la Mécanique*<sup>16</sup>, a fianco della teoria classica dell'elasticità. A partire dal 1864 l'*Académie des Sciences* di Parigi promuove la pubblicazione di una serie di memorie nelle quali si configurano gli statuti ancora incerti di una disciplina che in breve tempo solleciterà l'interesse dei più autorevoli meccanici francesi. Essa prende spunto dai risultati conseguiti presso il Conservatorio di Arti e Mestieri di Parigi, nell'ambito dell'analisi sperimentale sui fenomeni di estrusione e punzonamento: le indagini, condotte da Henry Tresca, non hanno precedenti significativi e avanzano in mancanza di sicuri elementi di riferimento<sup>17</sup>, sulla base di un'analisi descrittiva dei fenomeni osservati. Tra le conclusioni principali del suo lavoro, Tresca annovera una nuova comprensione delle caratteristiche meccaniche dei corpi solidi e la descrizione dei parametri che regolano il loro processo deformativo oltre il limite elastico. Sono stabilite, inoltre, le leggi secondo le quali le superfici primitive si trasformano in nuove superfici geometriche ed è calcolata la traiettoria d'una "molecola" qualunque durante il processo deformativo. I dati sperimentali conducono a formule del tipo:

$$L = r_1 \left( 1 + \log \frac{r}{r_1} \right)$$

dove  $r$  indica il raggio del blocco cilindrico di prova,  $r_1$  quello del punzone che attraversa il provino per tutta la sua lunghezza e  $L$  la lunghezza della parte estrusa<sup>18</sup>,

---

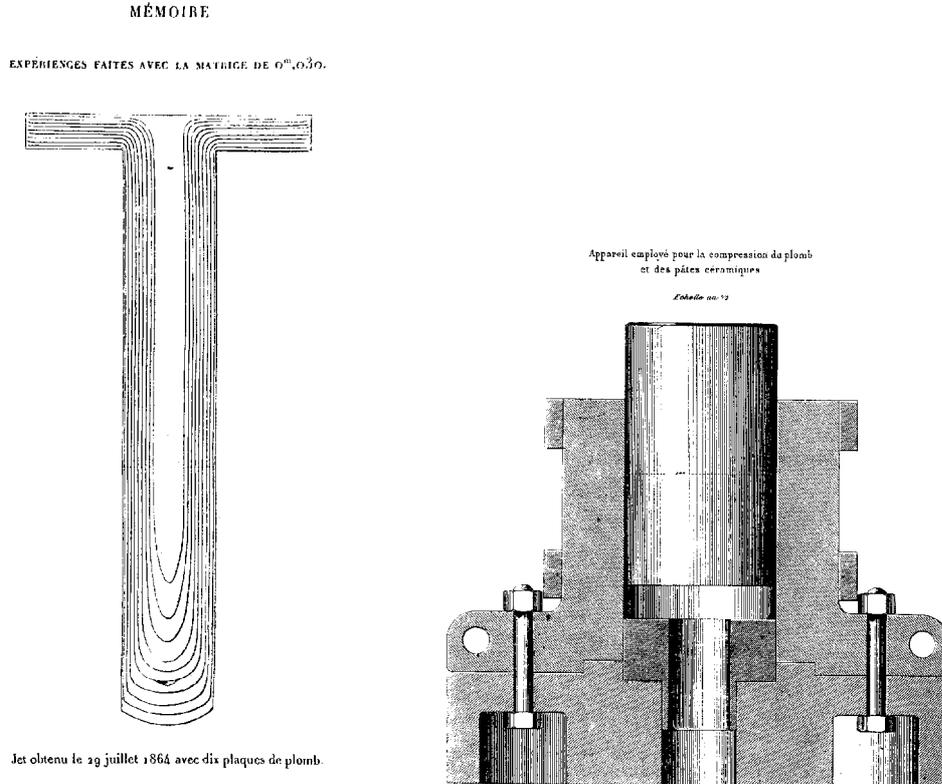
<sup>16</sup> Cfr. B. de Saint-Venant, Sur la mécanique des corps ductiles, *Comptes Rendus*, **73**, 1871, p. 1181.

<sup>17</sup> Il carattere pionieristico degli studi di Tresca è confermato dalla inadeguatezza delle macchine di prova allora disponibili; alcuni esperimenti vengono condotti su un "grand balancier de M. Barre, graveur général des monnaies", pressa servita anticamente alla battitura di monete e in seguito collegata ad una macchina a vapore per amplificarne la potenza; cfr. H. Tresca, Mémoire sur l'écoulement des corps solides, *Mém. pres. par div. Savants*, **18**, 1868, p. 746.

<sup>18</sup> Tali formule, in seguito poco apprezzate, sono state recentemente rivalutate quale esempio di rigorosa meticolosità sperimentale, che le rende valide ancora oggi al contrario di molte interpretazioni teoriche ormai superate. Cfr. Bell, The experimental foundations of solid mechanics, *Handbuch der Physik*, **VIa/1**, 1972, p. 429, nota 8: "One

oppure all'espressione elementare che esprime l'invarianza di volume<sup>19</sup>:

$$r^2 (H - h) = r_1^2 L$$



La parte più importante della ricerca riguarda la determinazione del lavoro di deformazione, espresso in funzione di un *coefficiente di fluidità*. Viene osservato che la pressione determinata dal punzone aumenta rapidamente all'aumentare della

---

century later one is inclined to agree with Tresca on the significance of a purely geometrical relation for the flow of various solids. In view of the ample subsequent demonstration of the physical limitations of the «Tresca condition» in modern plasticity, there is little question that his discovery of a purely geometrical flow property, independent of material parameters, was of greater importance”.

<sup>19</sup> Con  $r$  raggio del cilindro formato dal blocco,  $H$  l'altezza primitiva del cilindro,  $h$  l'altezza variabile dello stesso cilindro durante lo scorrimento,  $L$  la lunghezza del getto corrispondente,  $r_1$  il raggio dell'orifizio e quindi della parte estrusa. Quest'ipotesi risulterà determinante per lo sviluppo successivo della teoria della plasticità.

penetrazione<sup>20</sup>, sino ad un limite massimo che corrisponde alla *pressione di fluidità* ed è descritto dalla formula<sup>21</sup>:

$$P = 2K\pi r_1^2 \left(1 + \log \frac{r}{r_1}\right)$$

dalla quale è possibile ricavare il valore del *coefficiente di fluidità* K, caratteristico di ciascun materiale<sup>22</sup>. A questo proposito Tresca afferma che vale l'uguaglianza tra il coefficiente di fluidità e la resistenza al taglio (*au cisaillement*), “qui est d'ailleurs une conséquence de l'hypothèse d'une force de cohésion constante”, stabilendo implicitamente il criterio di plasticità che verrà riformulato da Saint-Venant in termini di tensioni.<sup>23</sup>

---

<sup>20</sup> Tresca osserva, inoltre, che la pressione non si distribuisce su tutto il materiale, ma è circoscritta ad una *zona di attività* nella quale si verifica il fenomeno di *écoulement*. cfr. Morin, Rapport sur le mémoire présenté à l'Académie le 29 mai 1869 par M. Tresca, sur le poinçonnage et sur la théorie mécanique de la déformation des corps solides, *Comptes Rendus*, **70**, 1870, p.289.

<sup>21</sup> H.Tresca, Mémoire sur le poinçonnage et la théorie mécanique de la déformation des métaux, *Comptes Rendus*, **68**, p. 1199.

<sup>22</sup> Per il piombo, ad esempio, è pari a 200 kg/cm<sup>2</sup>.

<sup>23</sup> Questo passaggio chiave della teoria di Tresca è illustrato ai membri dell'Académie da Morin (cfr. Rapport, *cit.*, p. 306): “Si l'on se reporte à ce qui a été dit précédemment de la marche des effets produits par un poinçon qui pénètre dans un solide posé sur une plaque percée d'une contre-matrice, on se rappellera que le mouvement peut être partagé en deux période très-distinctes. Dans la première, la résistance opposée par la matière pénétrée croît d'abord très-rapidement et atteint bientôt une valeur constante (...). Sous l'action du poinçon, les molécules déplacées s'écartent latéralement, les dimensions transversales du solides s'accroissent seules, et, pendant toute la première période, la débouchure n'apparaît pas encore à l'orifice de la contre-matrice. La seconde période commence à l'instant même où la débouchure se manifeste à cet orifice par une légère protuberance. A partir de ce moment, l'effet du poinçon, au lieu de consister dans un refoulement latéral de la matière, devient un cisaillement, et la résistance qu'éprouve

Tresca traccia le linee generali di un ampio programma di ricerca, i cui risultati appaiono subito sorprendenti, pur non riuscendo a dipanare la grande complessità dei fenomeni esaminati<sup>24</sup>. L'infelice affermazione che *l'écoulement* avvenga senza passaggio di stato - espressione severamente criticata da H.Bouasse<sup>25</sup> -

---

le poinçon à l'origine de ce découpage doit être évidemment égale à la valeur constante de celle qui s'opposait à sa marche dans la première période. Il est d'ailleurs évident aussi qu'à mesure que la débouchure sort, la résistance au cisaillement diminue graduellement. Il est alors très-logique d'admettre qu'au moment où le cisaillement commence, l'effort que le poinçon exerce est proportionnel à la surface annulaire de séparation et à un certain coefficient constant exprimant la résistance au cisaillement par mètre carré. Or, l'observation des pressions exercées à chaque position du poinçon donnait la valeur de la résistance totale, il a été facile à l'auteur de déduire de ses expériences la valeur de ce nouveau coefficient constant de résistance, et de faire voir qu'il est précisément égal à celui de fluidité, dont il retrouve ainsi la valeur par l'observation des débouchures produites par le poinçonnage."

<sup>24</sup> Nel tentativo di chiarire i rapporti tra le nuove indagini e il resto della meccanica e di sollecitare una revisione radicale delle usuali classificazioni disciplinari, Morin introduce una preliminare distinzione tra gli studi di resistenza dei materiali e le ricerche inaugurate da Tresca: nel primo caso, sostiene l'autore, si tratta di analizzare e interpretare le modalità di resistenza dei corpi, in base a considerazioni sulle attrazioni e repulsioni molecolari, e di determinare i limiti entro i quali queste forze conservano le loro proprietà. Nel secondo di studiare i fenomeni di scorrimento che si verificano nei corpi solidi quando le pressioni alle quali sono sottoposti superano la *pressione di fluidità*. Cfr. Rapport, *cit.*, p. 288.

<sup>25</sup> Cfr. Bouasse, *Théorie de l'élasticité. Résistance des matériaux*, Paris, 1920, p. 450: "Cette proposition: *l'état solide est un prolongement de l'état liquide*, n'a d'autre intérêt que de satisfaire les ignorants. Il est sûr qu'il n'existe pas de définition de l'état solide, pas davantage de l'état liquide: est-ce une raison pour les confondre? *est-ce surtout une raison pour ne pas distinguer entre les états solides et pour ne pas chercher, non certes une définition globale de l'état solide qui ne saurait manquer d'être absurde ou inutile, mais une série de définitions s'appliquant à chacun des états distingués?* (...). Au reste, l'erreur de Tresca apparaît aux premières lignes de son premier mémoire: «[Ce] mémoire ...a pour objet de montrer que les corps solides peuvent, SANS CHANGER D'ÉTAT,

è un sintomo del disagio che accompagna i tentativi di interpretazione dei nuovi risultati sperimentali. Ne sono ulteriore testimonianza le difficoltà tassonomiche legate alla pubblicazione dei primi rendiconti sui *Comptes Rendus* : le memorie sono dapprima raccolte sotto il titolo *mécanique appliquée*, modificato in seguito in *hydro-stéréodynamique* - coniato per l'occasione da Saint-Venant, che la considera una idrodinamica di nuova specie - e corretto ancora in *plastico-dynamique*. Oltre il limite elastico si configura un campo di indagine dai confini incerti, nel quale la *resistentia solidorum* cede il passo alla dinamica dei fluidi e sembra indicare una prova efficace dell' *unità costitutiva* della materia<sup>26</sup>. Su questa linea, nelle note

---

s'écouler à la manière des liquides, lorsqu'on exerce à leur surface des pressions suffisamment grandes.» C'est moi qui souligne: toute la question est dans ces quatre mots qui constituent une erreur aussi évidente que fondamentale.” Critiche analoghe sono rivolte da M. Brillouin, in un primo tempo convinto sostenitore delle ipotesi sostenute da Tresca; cfr. M.Brillouin, La théorie de Tresca-Saint-Venant, *Annales Phys.*, **14**, 1920, 75; idem, Théorie de la plasticité et de la fragilité des solides isotropes, *ivi*, **13**, 1920, 217-235; idem, Essai théorique sur la plasticité des solides, *Annales Phys.*, **3**, 1925, 129-144. Per comprendere l'importanza delle intuizioni di Tresca cfr. la conclusione del saggio di M.Reiner, Rheology (*Handbuch der Physik*, **VI**, 1958, 542): “As an *envoi* to this chapter we may mention that while solid and liquid are important technological distinctions, they have no place in rheology. While the term «rheology» brings to the mind Heraclitus' panta rei we may with as much justification say that «everything is solid». The criterion for the distinction between solid and liquid is not qualitative but quantitative.”

<sup>26</sup> Cfr. H.Tresca, *Mémoire, cit.*, 1868, p. 740. Si tratta di un elemento importante del successo della teoria di Tresca e nel contempo delle critiche ad essa rivolte; cfr. ad esempio, M.Lévy, Discours prononcé aux obsèques de M.Tresca, *Comptes Rendus*, **100**, p. 1613: “Mais ce qu'il plaçait au-dessus de tous les services qu'il rendait ainsi à l'industrie, ce qui l'a préoccupé sans cesse, dans les vingt dernières années de sa vie, ce sont ses études nombreuses, variées, théoriques et appliquées sur ce qu'avec une grande audace, mais une parfaite justesse, il a appelé *l'écoulement des solides* (...). Nous dirons seulement qu'il est parvenu à pénétrer, en quelque sorte, à l'intérieur de la matière ductile, à y introduire des nuées d'éclaireurs qui lui rendaient un compte fidèle des modifications profondes qu'y déterminaient les colossales pressions auxquelles il la soumettait. Les résultats qu'il a obtenus démontrent une

conclusive delle memorie principali, la prudenza del ricercatore lascia spazio ad alcune suggestioni analogiche che ben esprimono l'entusiasmo di fronte al nuovo: “la circulation dans les végétaux semblerait donc être un exemple d'écoulement par couches parallèles, comme si, par impossible et du fait de la résistance des enveloppes, les phénomènes organiques obéissaient à cette loi générale de la mécanique que nous avons cherché à caractériser, dans ce mémoire, sous le nom de *loi de l'écoulement concentrique des solides et des liquides*. Avec un peu plus de hardiesse que nous n'oserions en avoir, on pourrait peut-être se laisser aller jusqu'à entrevoir d'une manière plus générale que tous les tissus de l'organisme végétal et animal se développent ainsi par couches concentriques, sous l'action des forces incessantes auxquelles leurs principes nourriciers sont soumis.”<sup>27</sup>

### 1.3. *Il contributo di Saint-Venant.*

Saint-Venant è tra i primi a riconoscere l'importanza delle ricerche sulla deformazione permanente dei solidi e a dare una descrizione rigorosa dei fenomeni più significativi<sup>28</sup>. Sin dall'inizio acuto interprete dei risultati sperimentali ottenuti dal collega, egli esplicita la relazione tra coefficiente di taglio e coefficiente di fluidità, dedotta empiricamente da Tresca, imponendo l'uguaglianza tra la tensione tangenziale massima (corrispondente alla resistenza “au cisaillement”) e il coefficiente di fluidità K, sotto la condizione generale che i movimenti deformativi

---

fois de plus l'unité des lois physiques et sont aussi importants à ce point de vue que par leurs applications industrielles.”

<sup>27</sup> Cfr. H.Tresca, *Mémoire*, *cit.*, 1868, p. 799; analoghe interpretazioni si ritrovano in tutti i principali lavori di Tresca.

<sup>28</sup> L'interesse di Saint-Venant per questo tema è dimostrato dal fatto che il suo grande progetto di ridurre la meccanica a cinematica (cfr., ad esempio, *Principes de Mécanique fondés sur la Cinématique*, Paris, 1851) coinvolse alla fine anche le ricerche sulla plasticità, come è testimoniato da un tardivo articolo sulla *géométrie cinématique* delle deformazioni nei corpi elastici, plastici e fluidi (B. de Saint-Venant, *Géométrie cinématique. Sur celle des déformations des corps soit élastiques, soit plastiques, soit fluides*, *Comptes Rendus*, **80**, 1875, 53-56).

siano molto lenti e comunque tali che la resistenza non dipenda dalla loro velocità. Scrive, quindi, l'espressione nota come *condizione di Tresca*:<sup>29</sup>

$$p_{zx}^2 + \left( \frac{p_{zz} - p_{xx}}{2} \right)^2 = K^2$$

analoga a quella stabilita da Lévy nei suoi studi sulla spinta delle terre<sup>30</sup>. È così configurata una teoria completa della plasticodinamica con le relative equazioni alle derivate parziali del problema generale, che integrate per alcuni casi particolari trovano conferma nei risultati di laboratorio ottenuti da Tresca.

---

<sup>29</sup> Cfr. Saint-Venant, Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, *Comptes Rendus*, **70**, 1870, p.478.

<sup>30</sup> “Cette équation est analogue à celle que M. Lévy a eu l'idée d'établir entre les inconnues du problème de la poussée de terres (*Comptes Rendus*, **70**, 1870, 230, équation 3)”; cfr. *Comptes Rendus*, **70**, 1870, p.478. Ad un'altra memoria di Lévy dedicata al problema della spinta delle terre - Mémoire sur l'équilibre des masses de terre sans consistance, *Comptes Rendus*, **70**, 1870, 232 e 751 - Saint-Venant farà riferimento nel Complément aux mémoires..., *J. Math. pures et Appl.*, **16**, 1871, p.374. Il legame con la teoria della spinta delle terre è confermata dalle prove eseguite da Tresca su materiali pulverulenti, in analogia con quelle svolte su materiali duttili. Nel Complément del 1870 (*J. Math. Pures et Appl.*, **16**, p. 382, nota [\*]) Saint-Venant preciserà che “Le coefficient de résistance *plastique* à l'extension ou à la compression permanente d'une matière ductile, et celui de sa résistance aussi plastique au glissement ou au cisaillement, ne sont égaux que lorsque la force produisant l'extension longitudinale d'une portion prismatique (rectangle par exemple) est accompagnée et en quelque sorte secondée par une ou deux forces de même intensité K par unité superficielle, produisant la compression dans une ou deux des directions latérales”, evidenziando l'ipotesi assunta da Tresca, ossia che la deformazione avvenga a volume costante.

Torna all'attenzione il ruolo della  $\tau_{\max}$  sottolineato da Coulomb<sup>31</sup>, come accadrà qualche anno più tardi con l'ipotesi di Mohr e l'interpretazione della sua "curva involuppo". A Saint-Venant e Lévy sono, inoltre, da attribuire le prime equazioni di flusso plastico, impostate sul modello delle equazioni di moto di un fluido viscoso<sup>32</sup>. L'analogia con i fluidi induce a riproporre le equazioni dell'idrodinamica per il caso in cui le velocità di deformazione cessino di essere trascurabili<sup>33</sup> ed è così ribadita l'idea che il tema sia riconducibile alla meccanica dei fluidi, trattandosi di una "hydrodynamique de nouvelle espèce".

Nonostante le confortanti conferme sperimentali delle equazioni da lui stabilite, Saint-Venant dimostra grande cautela nel formulare previsioni sullo sviluppo della nuova teoria ed invita ad un maggiore approfondimento delle ricerche "sans lequel j'ai la conviction que la Plasticodynamique se trouverait arrêtée dès ses premiers pas et comme paralysée". Questo monito profetico segna l'epilogo delle indagini dedicate all'*écoulement des corps solides*. Tra i molti problemi rimasti insoluti il più rilevante riguarda la validità dell'analogia idrodinamica, riferimento guida della prima fase di ricerche.

---

<sup>31</sup> C.A.Coulomb, *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis ...*(1773), *Mémoires de Math. et Phys.* , 1776, 343-382

<sup>32</sup> E' interessante osservare che nel Mémoire "Sur un complément à donner à une des équations présentées par M. Lévy...", *Comptes Rendus*, 74, 1872, p. 1087, nota (\*) Saint -Venant indica una soluzione che procede nello spirito del *metodo semi-inverso*: "Il est à désirer que l'emploi de cette méthode mixte, qui a servi à des problèmes d'élasticité, soit essayé pour d'autres solutions de problèmes de plasticité, non moins intéressantes et difficiles."

<sup>33</sup> scrive Saint-Venant (cfr. C.R., cit., 1870, p.480): "Si aux premiers membres des équations des fluides sans frottement sensibles ni viscosité, remplacés par les trinômes relatifs aux solides, l'on ajoute les termes que Navier et ensuite Poisson, Cauchy, M.Stokes, etc. ont introduits dans les équations de l'hydrodynamique pour tenir compte des frottements dus aux vitesses de glissement relatif des couches, les équations des solides, ainsi complétées, s'étendront au cas où les vitesses avec lesquelles la déformation s'opère, sans être considérables, ne seraient plus excessivement petites."

#### 1.4. La “doctrine de la continuité.”

Il rapporto fra i due ambiti di ricerca - idrostatica/idrodinamica e resistenza dei materiali - non nasce con gli studi di Tresca, ma segue come un contrappunto lo sviluppo della teoria dell'elasticità, a prescindere dalla nota analogia utilizzata per la visualizzazione dei campi di tensione in un solido elastico soggetto a torsione<sup>34</sup>. È possibile, infatti, individuare nella meccanica dei fluidi il *calco* che ha contribuito a dare forma alla meccanica dei continui deformabili e segnalare come le indagini legate a vecchi strumenti interpretativi abbiano saputo tracciare nuovi sentieri per la ricerca. Purtroppo, la grande fortuna critica della *History*<sup>35</sup> di Todhunter e Pearson, che individua le radici della teoria elastica nelle ricerche sul comportamento delle verghe elastiche e sulla resistenza dei materiali<sup>36</sup>, ha impedito un'equilibrata valutazione di tale legame e un meditato ascolto delle voci dissenzienti<sup>37</sup>.

---

<sup>34</sup> cfr., ad esempio, J. Boussinesq, “Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques...”, *Journ. de Math.*, II ser., **16**, 125-274, 1871.

<sup>35</sup> P.Todhunter & K.Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, **1**, 1886; **2**, 1893, Cambridge.

<sup>36</sup> Sull'impostazione della *History* ha sicuramente influito l'esempio dell'*Abrégé historique* di Saint-Venant (cfr. L.Navier, *Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines, avec des Notes et des Appendices par M.Barré de Saint-Venant*, Paris, 1864). All'autore francese è dedicato il primo volume dell'opera di Todhunter e Pearson.

<sup>37</sup> Si tratta del contributo di Fresnel, al quale lo stesso Cauchy aveva riconosciuto il suo debito a proposito della definizione del concetto di tensione e che secondo Neumann dovrebbe comparire a pieno titolo tra i fondatori della teoria elastica. Per F.Neumann cfr. *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität*, tenute a Königsberg negli anni 1857-1874 e pubblicate postume nel 1885 (C.Neumann, *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers*, Leipzig, 1885, Introduzione, p. 1: “Die Theorie der Elasticität gehört zu den neuesten Zweigen der mathematischen Physik; ihre Anfänge reichen nur bis in die zwanziger Jahre unseres Jahrhunderts zurück. Wenn auch schon von den Bernoulli und von Euler einzelne Aufgaben aus der Lehre von der Elasticität mathematisch behandelt worden sind, so wurde eine

F. Neumann, in particolare, aveva insistito sul contributo offerto da Fresnel con i suoi studi sulla diffrazione della luce nei fluidi, grazie ai quali Cauchy aveva chiarito il ruolo determinante della componente tangenziale delle tensioni, ma la proposta di considerare l'autore francese tra i padri fondatori della teoria elastica venne dapprima ignorata e in seguito respinta con decisione da Pearson. Analoghe considerazioni

---

allgemeine Theorie (...) doch erst veranlasst durch Fresnel's neue Theorie des Lichtes(...). Er fand in der That, dass in den hydrodynamischen Gleichungen nur solche inneren Kräfte enthalten sind, welche aus einer Verdünnung oder Verdichtung des Mediums entstehen und welche wiederum eine Aenderung der Dichtigkeit hervorbringen. Er stellte sich daher die Frage, ob es in einem elastischen Medium keine anderen Kräfte gebe, ob in einem solchen System, wie es die Theilchen eines elastischen Körpers bilden, nicht auch Kräfte entstehen können aus einer Verschiebung der Theilchen, durch welche die Dichtigkeit nicht geändert wird. Wie jetzt die Sachen liegen, ist es leicht, den Standpunkt, auf den Fresnel sich stellte, klar zu machen.”). Nel secondo volume della *History* (II/2, 4-5) Pearson contesta questa interpretazione: “This account of the origin of the theory of elasticity, attributing it to the inability of the hydrodynamical equations to offer any explanation of the phenomena of light, has been accepted by several writers (see the review of our first volume in the *Bulletin des Sciences mathématiques*, **12**, p. 38, 1888), but it must be distinctly borne in mind that the first propounder of the theory was Navier, an elastician of the old, or Bernoulli-Eulerian school, who both in theory and practice had frequently dealt with elastic stresses by the old methods, and whose memoir of 1827 was preceded not by optical investigations but by researches on the elasticity of rods and plates.” Sempre nella *History*, II/1, p. 286 viene affermato un po' contraddittoriamente: “Saint-Venant's foundation, on the basis of Tresca's investigations, of the new branch of theoretical science, which he has termed plastico-dynamics, has not only direct value, but shews clearly the fallacy of those who would indentify plastic solids and viscous fluids. The fundamental equations in the two cases differ in character; a difference which may be expressed in the words - the plastic solid requires a certain magnitudes of stress (shear), the viscous fluid a certain magnitude of time for any stress whatever, to permantly displace their parts.” Analoga impostazione si ritrova nella *Historical introduction* di A.E.H. Love al suo *A Treatise on the mathematical theory of elasticity* (Cambridge; **1**, 1892; **2**, 1893) e nella *History of the strength of materials* (cit.) di S. Timoshenko.

potrebbero riguardare Green, che dedusse la teoria del potenziale elastico a partire da considerazioni sull'etere<sup>38</sup>.

Come vedremo fra breve il rapporto fra elasticità e fluidodinamica, negato inspiegabilmente da Todhunter e Pearson rappresenta uno snodo cruciale per comprendere l'evoluzione della teoria della plasticità rimanendo fedeli alla sua impostazione originaria. Per dimostrarlo sarebbe sufficiente ricostruire la genesi del concetto di tensione di Cauchy nell'ipotesi continuista, legato alla nozione di pressione in un fluido e, di rimando, come è stato dimostrato da Truesdell, alle ricerche di Giovanni Bernoulli e di Eulero<sup>39</sup>. Recenti studi<sup>40</sup> hanno ipotizzato che

---

<sup>38</sup> G.Green, On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-crystallized Media (1837), *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 7, 1839, 1-24.

<sup>39</sup> Per i rapporti solidi-fluidi cfr. L. Eulero, Decouverte d'un nouveau principe de mécanique, *Mémoire de l'Acad. Sci. Berlin*, (1750), 1752, pp. 185-217; anche *Opera Omnia*, 5, p. 81: "Un corps est appelé solide, dont l'intérieur n'est assujetti à aucun changement, ou dont toutes les parties conservent costamment la même situation entr'elles, quelque mouvement que puisse avoir le corps entier. Nonostant cette ferme et invariable liaison des parties, un corps solide peut recevoir une infinité de mouvements différens, dont la détermination et les loix, qui s'y observent, sont l'objet de la Mécanique ou Dynamique, et c'est par là, que cette science se distingue de l'Hydrodynamique ou Hydraulique, qui s'occupe dans la recherche du mouvement des corps fluides, dont toutes les parties sont tellement dégagées les une des autres, que chacune peut avoir un mouvement à part. Entre ces deux espèces de corps on peut constituer une moyenne, qui renferme les corps flexibles, dont la figure est susceptible d'une infinité de changemens, mais la considération du mouvement de ces corps se réduit aisément à la Mécanique et peut être développée par les mêmes principes, de sorte que dans cette Science il ne s'agit que des loix du mouvement, qui regardent les corps solides." Per le intuizioni di Eulero riguardo la meccanica del continuo cfr. C.Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies (1638-1788)*, in *L.Eulerii Opera Omnia*, (2), 11/2, Zürich, 1960. Anche C.Truesdell, *Essays*, 1968, p.121: "In John Bernoulli *Hydraulica* (1739), is the first successful use of the balance of forces to determine the motion of a deformable body. It would be wrong to consider this a mere application of Newtonian principle. In order to render those principles definite, Bernoulli saw that it was necessary to

proprio in questo filone di ricerche possa essere rintracciata una delle ragioni dell'inspiegabile silenzio di Cauchy nel periodo 1823-1827, dopo la pubblicazione di un riassunto delle *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non-élastiques* comparso sul *Bulletin de la Societé Philomatique*<sup>41</sup>. Tali ricerche proponevano una interpretazione continuista del

---

make some hypothesis about the action of fluid upon fluid. Guided, perhaps, by the old researches on generalized catenaries, where he had been the first to isolate correctly the forces acting upon an infinitesimal element of a cord (1691 to 1692, published 1743), he assumed that the fluid on each side of an infinitesimal normal slice pressed normally upon that slice, with a varying force which was itself a major unknown. He introduced the *internal force* of hydraulics."

<sup>40</sup> Cfr., ad es., B.Belhoste, A.-L. *Cauchy. A Biography*, Springer Verlag, 1990 (ed. originale francese, 1985), p. 97 e ssgg. Su questo tema e, in generale, sul delicato passaggio "from the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics" cfr. il fondamentale studio di I. Grattan-Guinness, *Convolution in French Mathematics, 1800-1840*, Basel-Boston-Berlin, 1990 (in particolare pp.1004-1005 e p.1011).

<sup>41</sup> cfr. A.Cauchy, *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non-élastiques*, *Bulletin des Sciences, par la Societé Philomatique de Paris*, 1823, 9-13. In particolare p. 9: "Si dans un corps solide élastique ou non élastique on vient à rendre rigide et invariable un petit élément du volume terminé par des faces quelconques, ce petit élément éprouvera sur ses différentes faces, et en chaque point de chacune d'elles, une pression ou tension déterminée. cette pression ou tension sera semblable à la pression qu'un fluide exerce contre un élément de l'enveloppe d'un corps solide, avec cette seule différence, que la pression exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide, est dirigée perpendiculairement à cette surface de dehors en dedans, et indépendante en chaque point de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans coordonnés, tandis que la pression ou tension exercée en un point donné d'un corps solide contre un très petit élément de surface passant par ce point, peut être dirigée perpendiculairement ou obliquement à cette surface, tantôt de dehors en dedans, s'il y a condensation, tantôt de dedans en dehors, s'il y a dilatation, et peut dépendre de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans dont il s'agit." Non vi è dubbio che sul primo lavoro del 1823 si fondi gran parte della ricerca successiva sulla teoria dell'elasticità. Cfr. il giudizio di Truesdell (C.Truesdell, *Sketch for a history of constitutive relations*, *Proc. VIII Int. Congr. on Rheology*, **1**, 1980, p. 13): "Cauchy's researches provided basic apparatus which was to suffice for research on continuum theories of materials for over 100 years." Anche Truesdell, *Six Lectures*, cit., p. 15: "Molecular hypotheses have come and gone, but a sound continuum theory is a monument forever, exempt from fashion." Per un'analisi particolareggiata e innovativa dello sviluppo storico della teoria molecolare cfr. il recente saggio di F.Foce, *La teoria molecolare dell'elasticità dalla fondazione ottocentesca ai nuovi sviluppi del XX secolo*, tesi di dottorato, Firenze 1993.

concetto di tensione, in sintonia con le teorie sulla meccanica dei fluidi di origine settecentesca ma in evidente contrasto con l'approccio molecolare che godeva allora di un vasto e incondizionato riconoscimento da parte della scuola francese. È probabile che l'inevitabile dissenso della corrente molecolarista, fortemente influenzata dalla dottrina di R.G.Boscovich sulle attrazioni e repulsioni molecolari, abbia indotto Cauchy ad una pausa di riflessione, al termine della quale pubblicherà per esteso gli studi di impronta euleriana che nel seguito prevarranno sull'impostazione molecolare - sostenuta da Navier, Poisson e, in parte, dallo stesso Cauchy - per dare origine alla moderna meccanica del continuo.

Altri interessanti riferimenti su questo tema possono essere rintracciati negli studi di S.Di Pasquale sulla meccanica delle murature<sup>42</sup>, nei quali è messo in evidenza l'apporto della meccanica dei fluidi sulla statica delle murature e sulla teoria della spinta delle terre. Il materiale intermedio tra i solidi e i fluidi è ricondotto al semifluido descritto da P. Delanges nella "Statica e Meccanica de' Semifluidi"<sup>43</sup>. Anche in questo caso si ha il tentativo di superare la facile dicotomia solido-fluido, alla ricerca di un modello fenomenologico più aderente ai materiali naturali che non sono riconducibili né all'uno né all'altro riferimento: "Tra i semifluidi - scrive Delanges - io intendo d'annoverare la sabbia, l'arena, le migliarole di piombo, il miglio o altre materie consimili. Sogliono al giorno d'oggi i Fisici usare indistintamente, parlando dell'acqua o liquor, tanto la voce di fluido che di liquido; io però ho creduto conveniente di apporre alle materie sopraindicate il nome di

---

<sup>42</sup> S.Di Pasquale, *Questioni concernenti la meccanica delle murature. Storia e prospettive*, in *Architettura e terremoti. Il caso di Parma*, Bologna, 1986, p. 50-83. In particolare p. 56: "Non è un caso, continuo a credere, che la sola scienza completamente definita sullo scorcio del Settecento fosse quella dei fluidi, materiali labili per eccellenza, modellati come insieme di sferette - che poi diventeranno molecole - lisce, prive di attrito - fluidi perfetti - e naturalmente incapaci di reagire a trazione: appunto come il primo modello delle murature e, cosa del tutto prevedibile, del terreno." Cfr. anche S. Di Pasquale, *New Trends in the Analysis of Masonry Structures*, *Meccanica*, **27**, 1993, 173-184.

<sup>43</sup> P.Delanges, *Statica e meccanica de' semifluidi*, *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana*, **4**, 1788.

semifluido, per essere composte di parti elementari visibilmente separate e distinte fra sè non solo, ma eziandio quante e divisibili, condizioni che certo non possono assegnarsi agli elementi de' liquidi, e nemmeno a' propriamente detti fluidi, come sarebbe l'aria, il fuoco ecc.”<sup>44</sup>

Lo scenario nel quale si formò la teoria della plasticità esige, tuttavia, un confronto più ampio, che recuperi gli interrogativi sollevati dalla *doctrine de la continuité* attribuita da Saint-Venant alla scuola inglese e, in particolare, a Stokes e Maxwell. Nella V Appendice alla terza edizione del *Résumé des Leçons* di Navier (1864), contemporanea alla prima memoria di Tresca sul tema della plasticità, dopo aver richiamato l'importante saggio di Stokes “On the theories of internal friction of fluids in motion and the equilibrium and motion of elastic solids” (1845) e quello di J.C.Maxwell “On the equilibrium of elastic bodies” (1850), Saint-Venant presenta una severa analisi critica contro il tentativo perseguito dai due autori di sostenere la bi-costanza dell'isotropia elastica con argomenti tratti dall'analogia fra i solidi plastici e i fluidi viscosi<sup>45</sup>. Secondo Stokes, infatti, non esisterebbe “aucune ligne de

---

<sup>44</sup> P.Delanges, *Statica e meccanica de' semifluidi, cit.*, p.329. Per l'analisi di analoghe ricerche di Lambert, cfr. M.Corradi, *De la statique des demi-fluides à la théorie de la poussée des terres, Proc. XIX Int. Congr. Hist. Sci.* (Saragozza, 22-29 agosto 1993), in corso di stampa. Altri riferimenti più larvati ma altrettanto significativi, sono contenuti in un recente saggio di J. Casey (J.Casey, *The principle of rigidification, Arch. Hist. Ex. Sci.*, **43**, 1992, 329-383), nel quale sono analizzati gli stretti rapporti tra meccanica del corpo rigido e meccanica del corpo deformabile con la mediazione dell'idrostatica, allo scopo di evidenziare le assunzioni di base che sottendono il *principio di rigidificazione*; in particolare, sono messe a confronto due interpretazioni alternative del principio, la prima che tende ad applicarlo indiscriminatamente a tutti i corpi, rigidi o deformabili, che può farsi risalire ad Eulero ed è oggi rappresentata nei trattati di Truesdell-Toupin e Truesdell-Noll; la seconda, dovuta principalmente a Kelvin e Tait, che partendo dalle condizioni di equilibrio valide per un corpo rigido, cerca di provare che esse valgono per una porzione di fluido o di corpo deformabile.

<sup>45</sup> Il confronto tra le memorie sull'elasticità di Saint-Venant e di Stokes (o Maxwell), mostra con straordinaria evidenza la differenza di approccio caratteristica delle due scuole di pensiero delle quali questi autori furono autorevoli rappresentanti. Cfr., in proposito, la lettera che Saint-

démarcation entre les solides plastiques et les liquides visqueux” poiché la distinzione tra questi due tipi di corpi è addebitata soltanto al rapporto tra le forze di gravità e quelle di coesione; se, ad esempio, un corpo considerato duttile sulla terra fosse trasportato sul sole, indipendentemente dalla temperatura esso si comporterebbe come un fluido viscoso a causa dell'azione di gravità vent'otto volte superiore e, viceversa, un fluido viscoso trasportato dalla terra ad un pianeta piccolo come Pallade, si comporterebbe come un solido, perché la forza di gravità sarebbe ridotta di un ventesimo. “M. Stokes - aggiunge Saint-Venant - pousse cette doctrine de la *continuité* jusqu'à effacer (break down) la distinction *entre les liquides et les gaz*, en se fondant sur quelques faits de changement d'état en vase clos”<sup>46</sup>. Seguendo questa idea, Stokes è in grado di addurre nuove ragioni a sostegno della teoria bi-costante. Il termine *elasticità* è da lui utilizzato per definire due distinte proprietà dei corpi elastici: la prima relativa alla possibilità di riprendere il volume originario dopo essere stati sottoposti a pressioni uniformi, la seconda legata alla proprietà di ristabilire la propria forma in seguito alla deformazione, indipendentemente dalla compressione esercitata. Le due costanti A e B che compaiono nelle sue formule<sup>47</sup> debbono essere interpretate in questo senso: se, infatti, è sempre possibile distinguere due tipi di elasticità, il primo caratteristico dei fluidi e associato alla componente idrostatica della deformazione, il secondo proprio dei solidi e legato alle componenti di *shifting* che inducono una variazione di forma, i corpi elastici, che partecipano delle caratteristiche degli uni e degli altri, non possono che presentare *due* costanti nel caso isotropo<sup>48</sup>. Le argomentazioni di Stokes sono fondate su alcune semplici

---

Venant scrisse a Stokes in occasione della nuova edizione delle *Leçons* di Navier (lettera del 22 gennaio 1862, in *Memoir and scientific correspondence of the late Sir G.G.Stokes*, 1907, pp. 156-159).

<sup>46</sup> Cfr. B. de Saint-Venant in L.Navier, *Résumé des Leçons ...avec des Notes et des Appendices par M. B. de Saint-Venant*, Paris 1864, p. 737 e G.G.Stokes, *On the Theory of internal Friction of Fluids in Motion*, *Trans. Cambridge Soc.*, **8**, part III.

<sup>47</sup> Cfr. formule qui di seguito.

<sup>48</sup> È questa è la conclusione criticata da Saint-Venant, sostenitore della teoria molecolare rari-costante.

osservazioni formali relative alle equazioni di equilibrio per il corpo elastico e a quelle di moto dei fluidi viscosi:

$$\text{per i fluidi viscosi: } P_1 = p - 2\mu \left( \frac{dv_x}{dx} - \delta \right) \quad T_1 = -\mu \left( \frac{dv_y}{dz} + \frac{dv_z}{dy} \right)$$

$$\text{per i corpi elastici: } P_1 = -A \delta_1 - 2B \left( \frac{du_x}{dx} - \delta_1 \right) \quad T_1 = -B \left( \frac{du_y}{dz} + \frac{du_z}{dy} \right)$$

dove  $P_1$ ,  $T_1$  indicano le tensioni normali e tangenziali,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  le velocità del punto considerato di coordinate  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\mu$  il coefficiente di attrito interno,  $p$  la compressione media,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  gli spostamenti nella direzione degli assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\delta = \frac{1}{3} \left( \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} \right)$ ;  $\delta_1 = \frac{1}{3} \left( \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz} \right)$ , e  $A$ ,  $B$ , le costanti elastiche.

L'evidente analogia formale<sup>49</sup> induce Stokes a negare l'esistenza di una distinzione sostanziale tra solidi e fluidi e ad affermare che i corpi elastici si trovano ad un livello intermedio tra gli stati limite di solidità e fluidità perfetta. "On the whole - precisa Stokes - it is probable that the greater the plasticity of a substance the less its elasticity, and *vice versa*, although this rule is probably far from being without exception. When plasticity of the substance is still further increased, and its elasticity

---

<sup>49</sup> Tale analogia - dalla quale deriva quella più tarda per la torsione, descritta, fra gli altri, da J. Boussinesq nella memoria, *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques...*, *Journ. de Math.*, II ser., **16**, 125-274, 1871 - è stata definita da Truesdell "utterly false", perché basata sulla componente lineare delle espressioni prese in considerazione. L'obiezione, corretta dal punto di vista teoretico, non tiene conto del ruolo essenziale da essa svolto nel corso del XIX secolo, allorché il "linear thinking" - per usare un'espressione cara a Truesdell - dominava tra gli elasticisti più illustri. Per ciò che riguarda la scomposizione di un tensore doppio simmetrico in componente cubica e deviatorica, sulla quale torneremo spesso nel corso della trattazione, si deve a C. Raimondi una recente chiarificazione sulla necessità di tale scomposizione ai fini della risoluzione dell'equazione secolare. Cfr. C. Raimondi, Una osservazione sulla scomposizione di un tensore doppio simmetrico e sulla equazione secolare, *Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Pisa*, **19**, 1991, 23-24.

diminished, it passes in a viscous fluid.(...).There seems no line of demarcation between a solid and a viscous fluid”<sup>50</sup>.

L'intreccio tra teoria rari- e multiconstante<sup>51</sup> e teoria della plasticità non si limita, tuttavia, a queste generiche osservazioni di Stokes e Saint-Venant. Vi sono infatti altre considerazioni che possono essere dedotte dal potenziale quadratico di Green, nel caso in cui ad esso venga sottratta la componente idrostatica delle tensioni per passare da 21 a 15 coefficienti distinti. Una descrizione significativa è offerta da W.Thomson nella memoria *On the elasticity of a crystal according to Boscovich* <sup>52</sup>, dove si mostra che nell'ipotesi di utilizzare come modello un cristallo considerato come gruppo omogeneo di punti singoli, si determinano sei relazioni tra i ventuno coefficienti della funzione quadratica, e ad esse corrisponde una infinita resistenza al cambiamento di volume. In questo modo, nel caso isotropo si individua una sola costante materiale, in accordo con la teoria molecolare di Navier e Poisson. Un esempio esplicito fa riferimento ad un reticolo elementare composto di “tie-struts absolutely resistant against push and pull, that is to say, each of constant length”, nel quale ad ogni deformazione corrisponde soltanto un cambiamento di forma. In questo caso, la funzione quadratica tensioni-deformazioni che esprime il lavoro necessario a

---

<sup>50</sup> Stokes, *ivi*, 126; scrivono Todhunter & Pearson a questo proposito (*op. cit.*, **1**, 500): “The strongest argument however for multi-constancy in Stokes' memoir is undoubtedly to be found in the transition he would make from viscous fluids to elastic solids. He in fact draws no line between a plastic solid and a viscous fluid. The formulae for the equilibrium of an isotropic plastic solid would thus be bi-constant.”. Nel secondo volume viene ulteriormente sostenuta la posizione critica di Saint-Venant (*History*, **II/1**, p.133): “Saint-Venant's objections to those arguments of Stokes which are drawn from the «doctrine of continuity», - practically from the equivalence of the plasticity of metals and the viscosity of fluids - seem to me very forcible and should be read by all scientists interested in the ultimate molecular constitution of bodies.”

<sup>51</sup> Si fa riferimento alla classica definizione di Todhunter e Pearson; cfr. I.Todhunter e K.Pearson, *History...*, *cit.*, **1**, pp. 496-505.

<sup>52</sup> W.Thomson, *On the elasticity of a crystal according to Boscovich*, *Proc. Royal Soc.*, June 8, 1893, anche in *Baltimore Lectures.*, London, 1904, p. 643 e ssgg.

produrre una deformazione infinitesima del sistema contiene 15 coefficienti indipendenti; è tuttavia sufficiente assegnare un certo grado di deformabilità assiale agli elementi inizialmente supposti rigidi, perchè i coefficienti diventino 21, come dimostrato dalla teoria di Green nel caso di corpi omogenei anisotropi. Non è improbabile che nello sviluppo di questo esempio Thomson abbia fatto uso prezioso delle osservazioni di Maxwell riportate nella lettera del 1856 a lui indirizzata<sup>53</sup>.

Inoltre, sulla stessa linea di ricerca si trovano altri autori inglesi quali Jellet, Haughton e Rankine. Haughton<sup>54</sup> descrive il seguente potenziale dedotto da un modello molecolare

$$V = \int (F_0 \rho' + F_1 \rho'^2) \rho^2 \sin \alpha \, d\rho \, d\Phi$$

dove  $\rho'$  indica la variazione della distanza tra due molecole e  $F_0$ ,  $F_1$  due funzioni caratteristiche, rispettivamente, dei fluidi e dei solidi. Si ottiene allora  $V=V_1(F_1)$  per i corpi solidi;  $V=V_0(F_0)$  per i fluidi perfetti e  $V=V_0+V_1$  per i fluidi viscosi.<sup>55</sup>

---

<sup>53</sup> La teoria sostenuta da Stokes e Maxwell sulla continuità dello stato solido e fluido, è ribadita da W.Thomson in numerose occasioni; cfr. ad esempio, W.Thomson, *On the elasticity and viscosity of metals*, *Proc. Royal Society of London*, **14**, 1865, 289-297.

<sup>54</sup> S. Haughton, *On the laws of equilibrium and motion of solid and fluid bodies*, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **1**, 1846, 173-182; versione riveduta in *Trans. Roy. Irish Acad.*, **21**, 1849, 151-198; la formula è riportata a p. 153.

<sup>55</sup> La trattazione è volutamente generica, a causa delle incerte fondamenta della disciplina. Cfr. S. Haughton, *op. cit.*, p. 154: "Our ignorance of the internal structure of bodies is so great, that such considerations as these would be, by themselves, an unsafe foundation for a theory of solids and fluids; and the best course is, to use them only as indications of the correct definitions, which must themselves be ascertained by the agreement of the results they lead to, with the known laws of solid and fluid bodies."

Per Rankine<sup>56</sup>, invece, il modello è più articolato: egli immagina che ciascun atomo di materia sia costituito da un nucleo circondato da una “elastic atmosphere” trattenuta da una forza di attrazione, cosicché l'elasticità dei corpi può essere ricondotta a due componenti, una dipendente da tale atmosfera e relativa a cambiamenti di volume, l'altra dovuta all'azione mutua che si sviluppa tra i nuclei alla quale deve essere attribuita la resistenza per forma. In un importante saggio sulle *Laws of elasticity of solid bodies* (1850), l'autore inglese ribadirà che “the elasticity peculiar to elastic bodies is, therefore, due to the mutual action of centres of force. Solid bodies may nevertheless possess, in addition, a portion of that species of elasticity which belongs to fluids. The investigation is simplified by considering, in the first place, the elasticity of a solid body as arising from the mutual action of centres of force only, and afterwards adding the proper portion of fluid elasticity”<sup>57</sup>.

È soprattutto Maxwell, tuttavia, che dà a questo indirizzo di pensiero una impronta determinante. Già nel primo *draft of paper* per la memoria “On the equilibrium of elastic solids” (Autunno 1849-Primavera 1850) egli afferma che “since there are in nature bodies which are in every intermediate state from perfect solidity to perfect fluidity, the two elastic powers cannot exist in every body in the same proportion, therefore the equations of elasticity must contain two coefficients, one common to liquids and other peculiar to solids”<sup>58</sup>. Questo passo, nel quale si avverte l'eco del dibattito sulle costanti elastiche, esprime probabilmente la principale *strong reason* che convinse Maxwell ad adottare la condizione di snervamento descritta dall'espressione riportata nella lettera a W.Thomson. Se il superamento del limite elastico corrisponde al passaggio dallo stato elastico a quello fluido-viscoso, è legittimo porre il criterio di plasticità funzione della resilienza di rigidità  $R_2$ , ossia del

---

<sup>56</sup> W.J.M. Rankine, On the vibrations of plane-polarised light (1850), in *Miscellaneous Scientific Papers*, London 1881, p. 152.

<sup>57</sup> W.J.M.Rankine, Laws of elasticity of solid bodies (1850), *The Cambridge and Dublin Math. Jour.*, **6**, 1851, ()-80 e 178-181; anche *Miscellaneous Papers*, cit., p. 108.

<sup>58</sup> J.C.Maxwell, Draft of Paper “On the Equilibrium of Elastic Solids”, in *The scientific letters and papers of J.C.Maxwell*, **1**, (1846-1862), 133-182, Cambridge, 1990.

parametro che distingue i solidi dai fluidi. Ancora più esplicito risulterà un brano successivo inserito nella voce *Constitution of bodies* dell'Enciclopedia Britannica (1876), nel quale vengono ribaditi i concetti descritti da Stokes, che trovano in Maxwell un convinto sostenitore.

Gli studi di idrostereodinamica coltivati dalla scuola francese sulla base degli esperimenti di Tresca si trovano così in sintonia con le interpretazioni di Stokes e dei suoi seguaci - a dispetto delle critiche di Saint-Venant alla *doctrine de la continuité* - e la proposta di Maxwell si sottrae all'isolamento nella quale l'aveva relegata una storiografia poco attenta ad assegnare il giusto riconoscimento ai diversi contributi che hanno determinato la nascita della *plastico-dynamique*. Nelle pagine del *Bulletin des Sciences Mathématiques* un anonimo recensore aveva già affermato l'esigenza di una impostazione più aperta in occasione della pubblicazione del I volume della *History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials* di Todhunter & Pearson. Ma il suo invito a osservare che “ce n'est pas seulement de ces problèmes [résistance des matériaux, théorie de la courbe élastique,...] particuliers qu'est sortie la théorie générale de l'Élasticité, c'est pour une part au moins égale, de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique”<sup>59</sup>, rimase inascoltato.

---

<sup>59</sup> Recensione al vol. I della *History* di Todhunter & Pearson in *Bulletin des Sciences Math.*, **12**, 38-40, 1888, in particolare p. 38: “J'avais d'abord l'intention de joindre à ce compte rendu quelques considérations sur les débuts de la théorie de l'élasticité, et la période de formation qui correspond aux premiers Chapitres du Livre de Todhunter, dus principalement à M.Pearson; mais je n'ai pas tardé à me convaincre que, forcé de se limiter, M. Pearson a dû laisser systématiquement dans l'ombre tout un côté de cette histoire. C'est aux problèmes de résistance des matériaux, à la théorie de la courbe élastique qu'il s'attache exclusivement, bien que l'équilibre et les vibrations des cordes appartiennent autant à la théorie de l'Élasticité qu'à la Mécanique rationnelle. Ce n'est pas seulement de ces problèmes particuliers qu'est sortie la théorie générale de l'Élasticité, c'est, pour une part au moins égale, de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique. Les progrès de ces Sciences sont intimement liés; les mêmes géomètres y contribuent, et un demi-siècle à peine sépare la constitution d'une théorie générale de l'Élasticité de l'établissement par Euler, puis par Lagrange, des équations différentielles du mouvement d'un fluide continu. Sur ce côté de la question tout était à lire à nouveau, M.Pearson n'en ayant rien dit

### 1.5. La diffusione della “doctrine de la continuité”.

L'importanza del filone di ricerche segnalato è dimostrata dalla diffusione, spesso indiretta, dell'impostazione indicata da Stokes. Nel 1890, Marcel Brillouin<sup>60</sup> torna sull'argomento proponendo una teoria dello snervamento che riconosce in Stokes, Maxwell e Thomson gli artefici di un nuovo modo di intendere la distinzione solido-fluido, e quindi il punto di snervamento, trascurando invece del tutto i contributi della scuola francese. In Germania, inoltre, W.Voigt, impegnato in studi teoretico-sperimentali sui reticoli cristallini che prefigurano il ruolo delle indagini microstrutturali anche per la teoria della resistenza dei materiali, utilizza concetti che ricordano da vicino la *doctrine de la continuité*. Sin dal tempo delle *Beobachtungen über die Festigkeit bei homogener Deformation*<sup>61</sup> Voigt aveva tentato un superamento delle condizioni di rottura tradizionali, con particolare riferimento a quella della dilatazione massima attribuita a Saint-Venant e quella della massima

---

[in nota è citato come esempio «extrêmement intéressante» il saggio di Thurot sul principio di Archimede, pubblicato dalla *Revue archéologique* tra il 1868 e il 1869]; et quant au reste la différence n'était pas grande.” Il giudizio dell'anonimo recensore potrebbe essere confermato ancora oggi, in mancanza di studi storici esaurienti sull'argomento. Manca, in particolare, una ricerca sullo sviluppo delle teorie idrostatiche e idrodinamiche, a parte le pregevoli analisi introduttive di Truesdell sul XVIII secolo e di P.F.Neményi (*The Main Concepts and Ideas of Fluid Dynamics in their Historical Development*, *AHES*, 2, 1962-'66, 52-86).

<sup>60</sup> M.Brillouin, Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides, *Ann. École Norm. Sup.*, 7, 345-360, 1890. In questa memoria è presentato un primo tentativo di ricondurre lo studio della condizione limite di snervamento ad un problema di indeterminazione dello stato deformativo rispetto ad un dato sistema di “forces élastiques”.

<sup>61</sup> W.Voigt, Beobachtungen über die Festigkeit bei homogener Deformation, *Annalen der Physik und Chemie*, 53, 1894, 43-56 (già in *Gött. Nachrichten*, n.13, 1893, p.521).

tensione riferita a Clebsch<sup>62</sup>, proponendo una generalizzazione di quest'ultima che tenesse conto delle rimanenti tensioni principali. Negli anni successivi si occupa anche degli studi di Mohr rilevando la fragilità della sua teoria sulla curva inviluppo, animata da ottimi propositi di natura tecnica ma priva di qualsiasi valido riferimento fisico-meccanico. In particolare, non è ritenuta sostenibile dal punto di vista teorico la “regola di Mohr”<sup>63</sup>, basata sull'individuazione dei valori estremi della tensione, a prescindere dalla tensione principale media. Su queste considerazioni Mohr aveva costruito la curva inviluppo, alla quale Voigt riconosce “ihre geometrische Eleganz”, senza tuttavia poter attribuirle un qualsiasi significato fisico rispondente alle prove sperimentali<sup>64</sup>.

Le sue notazioni sono volutamente circoscritte ai materiali fragili, ma alcune osservazioni preliminari mettono a fuoco le difficoltà del problema considerato nella sua generalità<sup>65</sup>. La inconsistenza sperimentale delle ipotesi tradizionali è definitivamente sancita da Voigt, che si richiama anche agli studi svolti da A.Föppl presso la Technische Hochschule di Monaco. Motivo sufficiente per intraprendere rigorose indagini di laboratorio che partano dai casi più semplici e abbiano come obiettivo la spiegazione “durch wissenschaftliche Gesichtspunkte” dei fenomeni osservati<sup>66</sup>. Sulla base di un modello molecolare l'autore descrive gli spostamenti relativi tra una molecola generica  $a'$ , di coordinate  $x', y', z'$  ed una di riferimento  $a$ , di coordinate  $x, y, z$ , nella forma:

---

<sup>62</sup> In realtà, come abbiamo già osservato, essa è riconducibile a Galileo.

<sup>63</sup> Con questa espressione Voigt sottolinea l'indirizzo applicativo della trattazione di Mohr.

<sup>64</sup> W.Voigt, *ivi*, 580.

<sup>65</sup> W.Voigt, *Zur Festigkeitslehre, Annalen der Physik*, **4**, 1901; anche W.Voigt, *Kleine Schriften*, **3**, 567-591.

<sup>66</sup> W.Voigt, *ivi*, 591. Come vedremo fra breve il rimprovero mosso da Voigt nei confronti di Mohr potrebbe facilmente coinvolgere anche i due decenni successivi, durante i quali l'approccio tecnico continua a prevalere su quello teorico.

$$u' = x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z'$$

$$v' = \frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z'$$

$$w' = \frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z'$$

dove  $x_x, \dots, z_z$  indicano le deformazioni. Nel caso di mezzi fluido-elastici le precedenti relazioni si riducono alle:

$$u' = \frac{1}{3} x' \theta \quad v' = \frac{1}{3} y' \theta \quad w' = \frac{1}{3} z' \theta$$

dove  $\theta$  indica la dilatazione di volume:  $x_x + y_x + z_x = \theta$ . È possibile, allora, scrivere delle relazioni generali valide sia per i corpi solido-elastici sia per quelli fluido-elastici, e che nel contempo tengano conto degli eventuali gradi intermedi tra i due tipi di corpo. Si ottengono così le espressioni:

$$u' = \beta (x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z') + \frac{1}{3} (1-\beta) x' \theta$$

$$v' = \beta (\frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z') + \frac{1}{3} (1-\beta) y' \theta$$

$$w' = \beta (\frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z') + \frac{1}{3} (1-\beta) z' \theta$$

che al variare di  $\beta$  consentono di descrivere i diversi comportamenti del materiale. Attraverso di esse Voigt perviene ad una estensione della teoria molecolare che è in grado di descrivere corpi a *unvollkommener Festheit*, via intermedia tra i corpi *vollkommen elastisch-flüssig* e quelli *vollkommen elastisch-festen* (a rigidità imperfetta, perfettamente fluido-elastici e perfettamente rigido-elastici)<sup>67</sup>. Come è

---

<sup>67</sup> Voigt non aggiunge a tale proposito alcuna referenza bibliografica; cfr. W.Voigt, Über das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie, *Annalen der Physik*, IV Folge, **4**, 1901 (estratto); cfr. anche T.Schwedoff, Die Starrheit der Flüssigkeiten, *Phys. Zeits.*, **1**, 1900, 552-554 (resoconto di S.Oppenheimer della relazione tenuta da Schwedoff al Congresso

facile vedere è qui riproposta l'idea di Stokes relativa alla scomposizione in elasticità di forma e di volume e alla possibilità di rappresentare i fenomeni intermedi come semplice somma degli effetti.

#### 1.6. *La proposta di Huber.*

Una formulazione analoga a quella di Maxwell, ma elaborata in modo del tutto autonomo è presentata da M.T.Huber nel saggio “Il lavoro specifico di deformazione come misura dello sforzo del materiale”<sup>68</sup>. L'autore si sofferma sui limiti dei criteri tradizionali della dilatazione o contrazione massima (Poncelet, Saint-Venant) sostenuta da autori tedeschi quali F.Grashof o E.Winkler, per suggerire un'impostazione del problema che tenga conto del *lavoro di deformazione*, al quale deve essere imposto un limite affinché non si verifichino deformazioni permanenti. Le ragioni che lo spingono a proporre un nuovo criterio sono elementari ma efficaci. Riflettendo sullo schema rappresentato in figura<sup>69</sup>, egli afferma che il raggiungimento del limite elastico non dipende soltanto dallo spostamento delle particelle collocate

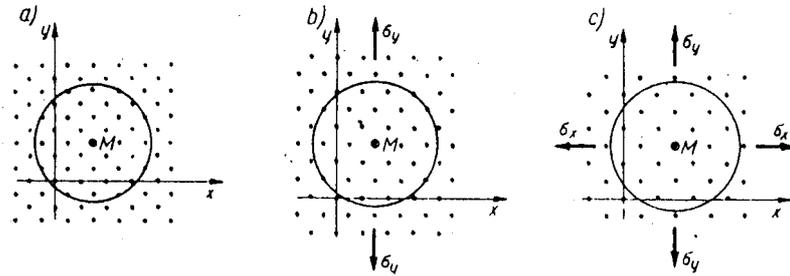
---

Internazionale di Fisica, Parigi 1900). In seguito si parlerà di *materiale di Voigt*, accogliendo un suggerimento di von Mises (von Mises, Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua, *Proc. III Int. Congr. Appl. Mech.*, 1930, 4-11), in riferimento ad un modello analogo che riassume le proprietà dei materiali elastici e fluido-viscosi. Cfr., in proposito, le notazioni di C Truesdell in “The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics” (*JRMA*, 1, 1952, p. 254).

<sup>68</sup> M.T.Huber, Il lavoro specifico di deformazione come misura dello sforzo del materiale, (testo in polacco), *Czasopismo Techniczne* (Periodico tecnico), Lwow, 1904; anche *PISMA*, II, Varsavia 1956, 3-20. Per una curiosa coincidenza questo lavoro fu pubblicato a Leopoli (in polacco Lwow), città natale di von Mises, ma quest'ultimo ne venne a conoscenza soltanto nel 1924. Una formulazione analoga sarà presentata da Girtler pochi anni più tardi; cfr. Girtler, Über das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr, *Sitzungsberichte der Wiener Akad.*, 116, IIa, 509-555, 1907.

<sup>69</sup> Estratto dal lavoro originale di Huber.

nella direzione di maggior allungamento, ma anche dalla variazione delle distanze reciproche rispetto alle altre direzioni che passano per il punto considerato.



Rys. 1. Rozkład naprężeń w ciele odkształconym: a) stan naturalny, b) rozciąganie w kierunku  $y$ , c) rozciąganie w kierunkach  $x$  i  $y$

Tale ragionamento porta a concludere che il cimento del materiale è misurato dal lavoro specifico di deformazione e che l'apparente contraddizione dovuta alla sollecitazione di compressione uniforme - non sufficiente, secondo molti autori, ad indurre snervamento - deve essere rimossa considerando che anche in questo caso si può raggiungere il limite elastico in corrispondenza di un certo valore, seppure molto grande, del lavoro di deformazione. Gli esempi addotti da Huber, riferiti al materiale isotropo, dimostrano la soddisfacente attendibilità della nuova ipotesi nei diversi casi di sollecitazione. In particolare, nel caso in cui tutti e tre gli sforzi principali siano di compressione, egli afferma che è possibile utilizzare “una certa forma particolare della funzione  $F$  [che definisce il lavoro di deformazione], usata per la prima volta da H.V. Helmholtz”. Si tratta della nota scomposizione del tensore delle tensioni in componente sferica e deviatorica, già implicitamente utilizzata da Maxwell e descritta da Helmholtz nella *Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen* (1902), che consente di porre la condizione di plasticità funzione del solo lavoro di variazione di forma, nell'ipotesi che la compressione uniforme non influisca in modo determinante sullo snervamento.

Nella successiva redazione di A. e L. Föppl<sup>70</sup>, sollecitata dallo stesso Huber, la trattazione guadagna chiarezza e coincisione. A partire dal principio generale che

<sup>70</sup> Cfr. A. e L. Föppl, *Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure*, 1, München und Berlin, 1920. La scomposizione del lavoro di deformazione è introdotta in precedenza con grande rilievo (p. 39) : “Daraus folgt der bemerkenswerte Satz, daß die bezogene Formänderungsarbeit für eine beliebige Formänderung gleich der

“Lo sforzo del materiale è definito dalla somma delle componenti del lavoro di deformazione che dipendono dalla pura variazione di forma e dalla pura variazione di volume”, è possibile affermare che se la variazione di volume è positiva, la misura del cimento è data dall'intero lavoro di deformazione  $A_p + A_g$  dove :

$$A_p = \frac{3(m-2)}{4(m+1)G} p^2 = \frac{3(m-2)}{2mE} p^2 \quad \text{con} \quad p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$A_g = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Se invece la variazione di volume è negativa, allora si deve trascurare  $A_p$  e considerare soltanto  $A_g$ . In questo modo perde di valore l'obiezione riguardante il caso della trazione uniforme, spesso impropriamente assimilato a quello della compressione idrostatica. Gli Autori sottolineano l'importanza degli studi di Voigt, riferimento essenziale anche per il lavoro originario di Huber. La ricordata critica

---

Summe der Arbeiten ist, die einerseits für die Dichteänderung allein und andererseits für die Gestaltänderung allein aufzuwenden sind.” Dopo aver illustrato nel dettaglio la teoria di Mohr i due autori spiegano i motivi della particolare attenzione dedicata ad un autore sconosciuto come Huber (p. 50): “Endlich ist noch darauf hinzuweisen, daß mit den bisher genannten noch keineswegs alle Möglichkeiten erschöpft sind, die für die Bemessung der Bruchgefahr von vornherein offen stehen. Es ist auch sehr wohl möglich, daß wenigstens für gewisse Stoffe eine dieser anderen Möglichkeiten dem wirklichen Verhalten näher kommt als die früheren. Namentlich liegt es nahe, in irgendeiner Weise die bezogene Formänderungsarbeit mit der Anstrengung des Stoffes in Verbindung zu bringen, da in ihr sowohl die auftretenden Spannungen als die von ihnen hervorgerufene Formänderung zur Geltung kommen. In der Tat hat man dies wiederholt versucht, und eine besondere Form dieser Annahme, die von Herrn Professor Huber an der technischen Hochschule in Lemberg aufgestellt wurde, erscheint durchaus beachtenswert, weshalb hier noch etwas näher darauf eingegangen werden soll. Die ursprüngliche Veröffentlichung von Huber ist uns nicht zugänglich, da sie in der polnischen Muttersprache ihres Verfassers geschrieben ist; wir können uns aber dabei nach einer brieflichen Mitteilung mit einem ausführlichen Auszuge aus der Abhandlung richten, die wir Herrn Huber verdanken.”

all'impostazione di Mohr e i risultati sperimentali ottenuti dallo studioso tedesco nei laboratori di Göttingen, infatti, avevano insinuato il dubbio sulla validità delle ipotesi normalmente utilizzate e, come vedremo in seguito, costituiranno per lungo tempo un riferimento metodologico essenziale.

Huber dimostra una buona conoscenza degli studi che lo avevano preceduto. Si meraviglia, ad esempio, di non aver trovato traccia della memoria di Beltrami<sup>71</sup> nell'ampia letteratura consultata, benché sin dai tempi di Castigliano<sup>72</sup> il concetto di lavoro di deformazione fosse utilizzato correntemente nella teoria dell'elasticità<sup>73</sup>. In

---

<sup>71</sup> “Dovrei, infine, segnalare che al termine della redazione di questo saggio, ho trovato l'idea principale ivi sviluppata nella biografia di E. Beltrami, contenuta nel VI volume delle «Notizie Matematiche» (Varsavia, 1902); tra l'altro il breve rapporto sulla memoria «Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici» (*Rend. Ist. Lomb.*, **18**, 1885) si basa sulla stessa idea”.

<sup>72</sup> Il riferimento a Castigliano è già presente nel Post-Scriptum del lavoro di Beltrami, nel quale si precisa che "dopo aver scritto quanto precede, ho riconosciuto con piacere che le obiezioni da me sollevate contro i modi fin qui usati di stabilire le condizioni di coesione erano state formulate quasi negli stessi termini, dal compianto Ing. Castigliano, alle pagine 128 e ssgg. della *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Torino, 1879-'80". È merito di Crotti aver compreso l'importanza delle intuizioni di Castigliano anche in questo settore. Scrive Castigliano nella sua *Théorie* (p. 128): “Ce principe, comme le précédent [si fa riferimento ai criteri della dilatazione e della tensione massima] ne paraît pas rigoureusement exact; car il peut se faire que les limites de la résistance élastique dépendent non seulement de la valeur de la plus grande force élastique, mais encore de la manière suivant laquelle la force élastique autour du point considéré varie, lorsqu'on fait varier la direction de l'élément superficiel par rapport auquel on la considère. (...). Ainsi, aucun des deux principes proposés ne paraît rigoureusement exact; mais comme il faut souvent les adopter, faute de mieux, nous allons donner les formules pour leur application, en généralisant même le premier, ainsi que l'a fait M. Barré de Saint-Venant, pour le rendre applicable aux corps doués de trois plans de symétrie.”

<sup>73</sup> Huber sarà vittima dello stesso oblio riscontrato nel caso dell'autore italiano. La sede periferica di pubblicazione e la lingua utilizzata contribuiscono a far passare inosservato il suo saggio. Sarà lo stesso

realtà il contributo degli autori italiani era stato significativo ma non puntuale. Beltrami nella nota memoria sulle *Condizioni di resistenza dei corpi elastici*<sup>74</sup> aveva

---

autore, qualche anno più tardi (probabilmente nel 1919), a comunicarne un sunto ad August Föppl, che nel 1920, insieme al figlio Ludwig, pubblica la prima edizione di *Drang und Zwang* (Oldenburg, München-Berlin 1920), nella quale alcuni passi (pp. 50-52) sono dedicati al “criterio di rottura” del nostro Autore. Nonostante l'autorevole recensione il lavoro di Huber non riscuote considerazione, fatta eccezione per un tempestivo intervento di K. von Sanden, futuro redattore dell'*Ingeniuer-Archiv: Die Energiegrenze der Elastizität nach Huber und Haigh im Vergleich zu den älteren Dehnungs- und Schubspannungstheorien (Werft und Reederei, 2, Heft 8, 217-218, 1921)*. Occorre attendere il primo Congresso di Meccanica Applicata (Delft, 1924), perché la memoria sul lavoro di deformazione venga finalmente a conoscenza di un più vasto pubblico. Nella discussione seguita alla relazione di H.Hencky, *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nebenspannungen*, è ancora Huber a dover ricordare che l'energia di variazione di forma come condizione di plasticità era stata da lui proposta vent'anni prima. Nello stesso anno l'intervento di Hencky è pubblicato sulla *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (4, Heft 4, 1924, 323-334)* con una “nota aggiunta” che segnala la priorità di Huber riguardo la definizione della *Gestaltänderungsenergie* (energia di variazione di forma o energia distorcente).

<sup>74</sup> Si tratta del lavoro “Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici” (*Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, serie II, tomo XVIII, 704-714, 1885). Stassi d'Alia (F.Stassi d'Alia, *Origini e sviluppi delle teorie sulla plasticità, Atti Acc. Sci.*, Palermo, **14**, 1954, 45-102, 1954, p. 82) ricorda che Nadai (1950, cfr. Bibliografia) “liquida con poche parole la teoria del Beltrami assumendo che «La totale energia elastica immagazzinata in un materiale prima che esso raggiunga lo stato plastico non può avere alcun significato quale condizione limite (...) poiché sotto l'azione di alta pressione idrostatica grandi quantità di energia elastica possono essere immagazzinate senza che ne conseguano fratture o deformazioni permanenti». Non mi sembra tuttavia che ci sia contrasto fra la teoria del Beltrami e il fatto sperimentale cui accenna il Nadai, il quale, forse per scarsa conoscenza della lingua italiana, non notò che il Beltrami così proseguiva (...)”. È ben nota l'influenza di questa memoria nel dibattito sui criteri di rottura; la ricorda, ad esempio, G.Krall nello scritto “Limiti superiori del cemento dinamico” (*Rendic. Acc. Naz. Lincei*, **7**, serie VI, 223-228, 1928), collegandosi ad una rielaborazione di T.Levi-Civita.

sostenuto che “la vera misura del cimento a cui è messa la coesione di un corpo elastico non debba essere desunta né dalla sola tensione massima, né dalla sola dilatazione massima, ma debba risultare, in qualche modo, dall'insieme di *tutte* le tensioni, o di *tutte* le dilatazioni che regnano nell'intorno d'ogni punto del corpo. (...). Dietro a ciò mi pare evidente che la vera misura del cimento a cui è messa, in ogni punto del corpo, la coesione molecolare, debba essere data dal valore che assume in quel punto il potenziale unitario d'elasticità, e che a questo valore, anziché a quello di una tensione o di una dilatazione, si debba prescrivere un limite massimo, per preservare il corpo dal pericolo di disgregazione (...).” L'originalità dell'idea di Beltrami non risiede tanto in queste generiche osservazioni, quanto nella sua giustificazione matematica collegata alla natura essenzialmente positiva della funzione quadratica che definisce il potenziale d'elasticità<sup>75</sup>, dalla quale consegue che non è possibile “imporre un limite al valore del potenziale d'elasticità senza imporre al tempo stesso un limite a quello di *ciascuna* componente, sia di tensione, sia di deformazione.”<sup>76</sup>

La sua ipotesi venne subito accolta da Crotti nella *Teoria dell'elasticità* (1888). Nella Prefazione l'autore annovera tra le novità descritte nel suo lavoro “l'accettazione del principio di recente proposto dall'illustre prof. Beltrami nella misura del cimento limite a cui è sottoposta la materia” e ricorda che tale metodo, pur non risolvendo rigorosamente la questione, come del resto non la risolvono gli altri, ha “il pregio della grande sua semplicità e speditezza, che ne fanno un prezioso acquisto per la scienza pratica”<sup>77</sup>.

---

<sup>75</sup> R.Lipschitz, Beweis eines Satzes der Elasticitätslehre, *Jour. für die reine und angewandte Mathematik*, **78**, 1874, 329-337.

<sup>76</sup> E.Beltrami, *op. cit.*, p. 706.

<sup>77</sup> Cfr. F.Crotti, *Teoria dell'elasticità*, Milano, 1888, pp. 95-96: “La questione adunque che riguarda il soddisfacimento delle condizioni di sicurezza nell'impiego dei corpi elastici può essere ventilata sotto due aspetti che si equivalgono perfettamente: e cioè si possono far studii per assegnare i limiti degli spostamenti oppure per assegnare i limiti delle forze(...). Ma la cosa non è così facile quando si tratti di solidi soggetti a trazioni in due o tre sensi ortogonali, od a sforzi tangenziali. (...). Come si esce da

CAPITOLO II  
IL CONTRIBUTO DELLA SCUOLA TEDESCA

---

tale difficoltà? Come dobbiamo regolarci nel caso che oltre a due o tre sforzi di trazione in sensi normali, si aggiungano degli sforzi tangenziali? I metodi fin qui seguiti erano due: o stabilire un massimo alle dilatazioni principali, o stabilire un massimo alle forze principali.(...). Io non seguirò né l'uno né l'altro di questi metodi e propongo invece un terzo assai più spedito e altrettanto sicuro; esso fu suggerito per la prima volta dall'illustre matematico Beltrami, professore all'Università di Pavia, in una sua memoria inserita negli Atti dell'Istituto Lombardo dell'anno 1885.(...)”. Sui risvolti pratici del criterio si era soffermato lo stesso Beltrami: “Praticamente poi il criterio desunto dal potenziale ha il grande vantaggio di non esigere la risoluzione preliminare d'alcuna equazione e di ridursi alla discussione d'una formola che non può mai presentare ambiguità di segni.” (cfr. E.Beltrami, *op. cit.*, p. 182). Anche gli studi di Guest, di poco posteriori, (J.J.Guest, *On the strength of ductile materials under combined stress, Philos. Magaz.*, 50, 1900, 69-132) non avevano contribuito a chiarire il tema nonostante le accurate prove sperimentali da lui condotte per dimostrare la validità del criterio della tensione tangenziale massima attribuito a Tresca. Guest ha piuttosto il merito di aver per primo fornito un quadro sintetico degli studi teorico-sperimentali sull'argomento, anche se la sua indagine è limitata all'ambiente scientifico francese e inglese. Scrive a questo proposito J.F.Bell in “The experimental Foundations of Solid Mechanics”, *Handbuch der Physik*, VI a/1, p. 486: “Guest's rejection of the maximum principal stress and maximum principal strain assumptions, together with the international engineering conflict of opinion, was in fact the preamble to a new conflict to come between this Guest law, or Tresca condition, for the yield surface, and the Maxwell-von Mises maximum energy of distortion criterion. Although 75 years of subsequent experimentation has cast the die in favor of the criterion first proposed by Maxwell but ascribed only to von Mises since Maxwell's paper long remained unpublished, there is historic significance in Guest's pioneering experimental research.”

## 2.1. Von Mises, 1913.

Con la memoria di Huber ci si avvia verso una nuova fioritura delle indagini sulla plasticità, paragonabile alla prima fase di ricerche inaugurata da Tresca. Nel periodo 1900-1930, la *Plastizitätstheorie*, pur non assumendo ancora una veste organica,<sup>78</sup> mostra le linee portanti dello sviluppo successivo e gli studiosi tedeschi presentano memorie fondamentali che fanno proprie le intuizioni di Tresca, Lévy e Saint-Venant e le osservazioni di Mohr. Tali studi segnano il passaggio tra la prima fase di ricerche, di impronta francese, e la seconda, circoscritta quasi esclusivamente all'ambiente tedesco.

Nel 1909 appare la prima memoria dedicata al problema plastico sulle *Nachrichten ...zu Göttingen*, nella quale Haar e Kármán<sup>79</sup> espongono una teoria dei corpi plastici e pulverulenti sulla base di un principio variazionale in seguito perfezionato da Hencky; in essa, tuttavia, la condizione di plasticità non presenta alcuna originalità essendo riproposto il criterio della tensione tangenziale massima

---

<sup>78</sup> Manca, infatti, sino agli anni '50, un 'trattato' sull'argomento; l'opera pionieristica di A.Nadai - *Der bildsame Zustand der Werkstoffe*, Berlin, 1927 - ha il difetto di anticipare troppo i tempi. A Nadai si deve un notevole lavoro di sintesi sulla teoria della plasticità - che confluirà nei due volumi dell'opera *Theory of flow and fracture of solids* (New York, 1950) - e l'appassionata diffusione delle ricerche sulla plasticità condotte in Unione Sovietica - ad esempio quelle di Sokolowsky e di Ilyushin -, e rimaste sconosciute sino alla fine della seconda guerra mondiale; cfr. a questo proposito A.Nadai, *Das Fließen von Metallen unter verschiedenen Beanspruchungen (Teil II)*, *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **3**, 1949, p. 421-445 (in particolare p. 435).

<sup>79</sup> Due anni più tardi T.von Kármán pubblicherà un interessante saggio sulla resistenza dei materiali sottoposti a compressione idrostatica; cfr. T. von Kármán, *Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck*, *Zeits. des Vereins deutscher Ingenieure*, **55**, 1911, 1749-1757; risale allo stesso anno il lavoro di H.Cassebaum, "Über das Verhalten von weichem Flußstahl jenseits der Proportionalitätsgrenze" (*Annalen der Physik*, **34**, 1911, 106-130), nel quale si chiariscono le condizioni nelle quali è lecito prescindere dalla dipendenza delle tensioni dalle velocità di snervamento.

adottato da Mohr. Tale impostazione è contestata da von Mises<sup>80</sup> qualche anno più tardi sulle pagine delle stesse *Nachrichten*. La sua analisi sulla meccanica dei corpi solidi nello stato di deformazione plastica dà avvio ad un nuovo dibattito sulla definizione della condizione di snervamento: l'intento di von Mises è quello di offrire “una formulazione completa delle equazioni di movimento per i corpi plastico-deformabili, nell'ambito della meccanica di Cauchy”, in contrasto quindi con il procedimento adottato da Haar e Kármán, che deducono le equazioni di moto da un principio, “il cui rapporto col resto della meccanica non è ancora stato chiarito”. Le premesse sono in sintonia con quelle tradizionali: raggiunto il limite elastico il corpo solido si comporta essenzialmente come un fluido viscoso e poiché la variazione di volume che accompagna questo processo è sempre molto ridotta, è lecito detrarre dal tensore delle tensioni la componente idrostatica per utilizzare soltanto il tensore deviatorico. Per quanto riguarda la condizione di snervamento, von Mises propone una correzione della condizione di Mohr, a partire dal presupposto che la tensione principale media svolga un ruolo significativo nel raggiungimento del limite elastico. Definite le *tensioni tangenziali principali* funzioni delle usuali tensioni principali  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

e il sistema di assi coordinati  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ , von Mises afferma che, in generale, il limite elastico può essere rappresentato da una curva chiusa che contiene l'origine e giace sul piano di equazione:

$$(1) \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

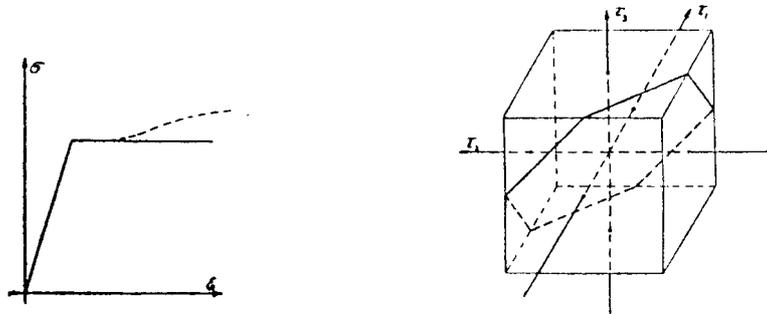
Se si pone un limite  $K$  a tutte e tre le tensioni tangenziali principali, tale che:

$$|\tau_1| \leq K, \quad |\tau_2| \leq K \quad |\tau_3| \leq K$$

---

<sup>80</sup> R.von Mises, *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*, *Nachr. K. Gesell. Wiss. Gö.*, 1913, 582-592.

il cubo corrispondente a queste tre disuguaglianze dovrà essere tagliato dal piano descritto dalla (1) per ottenere un esagono regolare che soddisfa le nuove condizioni.



Per evitare i punti angolosi presenti nella figura di snervamento appena descritta e difficilmente spiegabili dal punto di vista sperimentale, l'Autore propone di considerare il cerchio circoscritto all'esagono e, quindi, nello spazio tridimensionale  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ , la sfera:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2K^2$$

La sua equazione può essere facilmente riscritta nella forma seguente, con riferimento alle coordinate generiche x,y,z:

$$(2) \quad \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 - (\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) = \frac{4}{3} K^2$$

dove le  $\sigma'$  sono le componenti a indici uguali del tensore deviatorico.

La trattazione di von Mises, oggi considerata una tappa essenziale nello sviluppo della teoria della plasticità, è in realtà impostata su pochi dati sperimentali elaborati in modo elementare e in parte arbitrario. Per ottenere la giustificazione rigorosa della (2) occorre attendere il lavoro del '28, quando ormai anche la condizione di Huber, formalmente analoga ma fondata su assunti completamente diversi, era diventata nota. Ma prima di allora altri studiosi scendono in campo con

nuove proposte. Nel 1920, dopo trent'anni di silenzio sull'argomento<sup>81</sup>, M. Brillouin presenta due nuovi saggi sulla “teoria della plasticità e della fragilità dei corpi solidi isotropi”, nei quali viene in luce un disagio che sarà caratteristico di tutto il periodo successivo. Più di ogni altro, lo studioso francese avverte i limiti delle teorie sino ad allora elaborate e attribuisce ad essi il periodo di ripensamento seguito alla prima memoria (1890). Agli studi di Tresca viene rimproverata l'analogia tra il corpo plastico e i fluidi viscosi e ad essa si addebitano gli insuccessi che ne sono seguiti : “Lorsque j'ai commencé à m'occuper des grandes déformations, de la plasticité, de la fragilité (1890), il existait déjà pour la plasticité une doctrine entièrement formulée depuis 20 ans, celle de Tresca -Saint-Venant, restée néanmoins stérile depuis lors; il importe de discerner pourquoi: difficulté d'utilisation mathématique extrême? ou mauvaise traduction des faits en formules? (...). Il est malheureux que l'interprétation soit dominée par l'idée d'*écoulement* analogue à celui d'un fluide très visqueux, mais de propriétés isotropes. Là est, à mon avis, l'erreur initiale qui fausse toute la théorie, elle est incontestablement due à Tresca, mais elle a été formulée par Saint-Venant, qui l'a naïvement acceptée comme fournie par l'expérience, au lieu de reprendre la

---

<sup>81</sup> Le difficoltà poste dalla teoria matematica dell'plasticità hanno scoraggiato altri autorevoli studiosi; cfr. ad esempio, il caso di M.Lévy ricordato dallo stesso Brillouin (in *La théorie de Tresca-Saint-Venant, Annales de Physique*, 14, 1820, p. 80 in nota): “Court extrait d'un mémoire plus étendu présenté par M.Lévy à l'Académie des Sciences le 20 Juin 1870, et dont l'insertion au tome XXI des Mémoires des Savants étrangers avait été décidé le 10 Juillet 1871. Ce mémoire n'a pas été inséré, et n'a même jamais été publié. J'ignore pour quelles raisons. Il est même curieux que M.Lévy, qui était ingénieur des ponts et chaussées ne soit jamais revenu sur ce sujet, et n'ait jamais - autant qu'il me souvienne depuis 1887 - abordé cette question de la plasticité dans aucun des cours qu'il a fait au Collège de France comme suppléant de M. J.Bertrand, bien qu'il ait plusieurs fois traité des propriétés thermodynamiques des solides.” Persino Saint-Venant, in una delle ultime memorie dedicate all'argomento, aveva affermato (Saint-Venant, *De la suite qu'il serait nécessaire de donner aux recherches expérimentales de Plasticodynamique, Comptes Rendus*, 80, 1875, p. 116): “La Plasticodynamique, constituée et fondée sur les faits expérimentalement recueillis de 1863 à 1869; est-elle en mesure de fournir ou seulement de promettre les résultats désirés?”.

discussion de celles-ci *ab ovo*”<sup>82</sup>. Brillouin non offre proposte originali riguardo la definizione del limite elastico, ma gli argomenti critici da lui sottolineati presentano un nuovo elemento di riflessione.

Di intonazione più applicativa è invece il contemporaneo intervento di Haigh, relativo ad una ipotesi di tipo energetico associabile a quella di Huber. Secondo l'autore inglese il problema che si pone relativamente alla “strain-energy” è limitato alla verifica della costanza di tale quantità per un materiale qualsiasi sottoposto a sollecitazioni semplici o composte. Haigh non cita né Beltrami né Maxwell e la sua esposizione è un'ulteriore conferma del carattere empirico delle condizioni energetiche, favorite dalla semplicità applicativa piuttosto che dalla chiarezza degli assunti teoretici.<sup>83</sup>

È chiaro, ormai, che la definizione del concetto di criterio di snervamento è subordinata ad un confronto critico tra le diverse teorie proposte. Tale confronto si svolge, in particolare, sulle pagine della prima rivista che si occupa prioritariamente dei rapporti tra meccanica e matematica applicata, la *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, fondata nel 1921 da R. von Mises insieme ad illustri collaboratori quali G.Hamel e L.Prandtl. In quella sede la teoria della plasticità svolge

---

<sup>82</sup> M.Brillouin, La théorie de Tresca-Saint-Venant, *Annales Phys.*, **14**, 1920, 75; cfr. anche M.Brillouin, Théorie de la plasticité et de la fragilité des solides isotropes, *ivi*, **13**, 1920, 217-235; idem, Équations d'état de la phase plastique d'un solide naturellement isotrope, *Comptes Rendus*, 179, 1924, 1563-1566; idem, Essai théorique sur la plasticité des solides, *Annales Phys.*, **3**, 1925, 129-144. Brillouin sembra dimenticare gli apprezzamenti rivolti nella memoria del 1890 all'impostazione di Stokes e Maxwell, in sintonia con gli assunti ora criticati.

<sup>83</sup> Le due formulazioni energetiche di Huber ed Haigh sono discusse nello stesso anno in un articolo di Sanden, che procede ad un confronto diretto dei due criteri, sostanzialmente omogenei, con quelli da lui denominati di Saint-Venant - Tresca (massima dilatazione). Cfr. K.von Sanden, Die Energiegrenze der Elastizität nach Huber und Haigh im Vergleich zu den älteren Dehnungs- Schubspannungstheorien, *Werft und Reederei*, **2**, Heft 8, 1921, 217-218.

un ruolo di assoluto rilievo e i contributi di Prandtl<sup>84</sup>, Hencky, Nadai e tanti altri sondano nuove possibilità di sviluppo teorico e applicativo. Nel 1924 H.Hencky riprende e perfeziona l'idea originaria di Haar e Kármán per dimostrare che attraverso di essa è possibile giungere ad un sistema di equazioni differenziali che governa tutto l'ambito dei problemi di equilibrio elasto-plastico. Anche in questo caso la condizione di snervamento adottata non presenta caratteristiche di particolare originalità: il criterio di von Mises viene ripreso in chiave energetica e interpretato come funzione del lavoro elastico corrispondente ad una variazione di forma.<sup>85</sup>

---

<sup>84</sup> Alla memoria di L.Prandtl, Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden (*ZAMM*, **1**, 1921, 15-20) viene di solito fatto risalire il diagramma tensioni-deformazioni elastico-perfettamente plastico (la cosiddetta bilatera di Prandtl riferita al "plastischer Körper von Prandtl"); in realtà, come ricordano giustamente C.Ceccoli e P.Pozzati (cfr. C.Ceccoli & P.Pozzati, *Teoria e tecnica delle strutture*, **III/1**, Torino, 1987, p. 12), tale diagramma semplificato, utile per molte applicazioni, è già presente nell'articolo di von Mises del 1913, al quale abbiamo fatto riferimento in precedenza. Gli stessi autori, tuttavia, posticipano erroneamente il contributo di Prandtl al 1928 (*ivi*, p. 12, nota 4).

<sup>85</sup> H.Hencky, Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **4**, 1924, 323-334. A questo proposito Hencky propone un'immagine del *plastic yield* (cfr. p.329), che verrà ripresa da alcuni autori successivi, tra i quali M.Reiner e A.Freudenthal, che la presentano in una forma più completa (cfr. M.Reiner & A.Freudenthal, Failure of a material showing creep (a dynamical theory of strength), *Proc. V Int. Congr. Appl. Mechanics*, Wiley, New-York, 1939, p. 229): "A vessel the contents of which represents the distortional energy which can be stored up elastically per unit volume of the material, is suggested as a model of its distortional strength. The bottom of the vessel is perforated to represent the relaxation of elastic energy; an overflow opening represents plastic yield and the brim determines rupture. If energy is poured in so slowly that it leaks out entirely through the holes in the bottom, i.e., if the velocity of deformation is smaller or equals the velocity of relaxation, there is practically no possibility of failure by distortion. By pouring in energy at a higher rate, i.e., by increasing the power of deformation, the vessel is steadily filled until the overflow opening is reached and further energy

Particolare attenzione viene riservata alla distinzione tra criteri di rottura e di plasticità, e all'ipotesi, data per scontata, che uno stato di compressione idrostatica non influenzi lo snervamento.

Le considerazioni energetiche diventano sempre più convincenti col passare degli anni, in concomitanza con la pubblicazione degli studi di Lode e Bridgman sugli effetti della compressione idrostatica. Risulta, infatti, evidente la necessità di non trascurare a priori la variazione di volume conseguente ad una pressione uniforme e, quindi, la non ovvietà dell'ipotesi tradizionale. A questo proposito W.Lode<sup>86</sup> al termine della sua tesi presso l'Istituto di Meccanica applicata dell'Università di Göttingen, era giunto ad alcune importanti conclusioni: 1. per piccoli allungamenti i corpi metallici si comportano come se le loro componenti, nello stato naturale, ubbidissero alla condizione di plasticità descritta dal criterio della tensione tangenziale massima, e soltanto in seguito alla deformazione elastica (“bildsame Verformung”) la condizione di plasticità si approssima a quella che impone un valore costante della energia di variazione di forma (“Gestaltänderungsenergie”). 2. Per un allungamento che può variare dal 2 al 12 per cento gli

---

lost by plastic yield. If, however, the combined efforts of relaxation and plastic yield are not sufficient to dissipate the applied energy, the level in the vessel rises above the overflow (range of «strain-hardening») and reaches, finally, the brim. The material breaks at the moment the energy flows over the brim.” Anche *Proc. I Int. Congr. Appl. Mech.* (Delft, 1924), 312-316. Analoga immagine si ritrova, ad es., in R.Becker, Über Plastizität, Verfestigung und Rekristallisation, *Zeits. techn. Phys.*, 7, 1926, 547-555.

<sup>86</sup> W.Lode, Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 5, 1925, 142-144; idem, Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel, *Zeitschrift für Physik*, 36, 1926, 913-939; in quest'ultimo articolo Lode riprende la distinzione stabilita da Bach tra limite di snervamento minimo e massimo, per sottolineare le variazioni di tensione che si verificano nel passaggio tra la fase elastica e quella plastica. Cfr. C.Bach, Zum Begriff «Streckgrenze», *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 48, 1904, 1040-1043. Per quanto riguarda Bridgman cfr. ad esempio, P.W.Bridgman, Some mechanical properties of matter under high pressure, *Proc. II Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 1926, 53-61.

elementi quasiisotropi (“die quasiisotropen Körperelemente”<sup>87</sup>) soddisfano una condizione di plasticità che con un'approssimazione del 3 per cento corrisponde all'energia di variazione di forma. In uno studio pubblicato due anni più tardi, Lode si mostrerà più conciliante con l'ipotesi che esclude una rilevante influenza della compressione idrostatica sullo snervamento affermando che<sup>88</sup> “Das Ergebnis der Untersuchung war folgendes: Die Messungen lassen sich am besten wiedergeben durch die zuerst von Huber und unabhängig von v. Mises vorgeschlagene Gleichung:

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \text{konst.}''$$

«Bei Gelegenheit dieser Versuche ergab sich ganz von selbst auch die Beantwortung einer zweiten Fragestellung. Die Metalle ändern bei großen Formänderungen ihren Rauminhalt nur sehr Wenig.” Altri studi fondamentali sono dovuti a M.Ros & A.Eichinger<sup>89</sup> che attraverso una serie di accurate ricerche sperimentali sono in grado di confermare l'attendibilità del criterio del lavoro di variazione di forma (“Gestaltänderungsarbeit”) stabilito da Huber ed Hencky. Riguardo alla teoria della massima tensione tangenziale (Guest-Mohr), i risultati di prova mostrano discordanze sino al 15 %. Si dimostra inoltre l'impossibilità di costruire una curva involuppo che corrisponda ai dati sperimentali; essi, infatti, attestano in maniera inequivocabile che l'influenza della tensione principale media sullo snervamento e la coincidenza dei criteri di Guest-Mohr e di Huber-Hencky soltanto in casi particolari.

---

<sup>87</sup> La migliore definizione della *quasiisotropie* risale agli studi di W.Voigt. Cfr. W.Voigt, “Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Kristallelasticität” (Referat für den internationalen physikalischen Congreß in Paris, 1900), *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1900, 117-176.

<sup>88</sup> W. Lode, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle, *VDI-Zeits.*, **72**, 1928, 733.

<sup>89</sup> M.Ros & A.Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, *Proc. 2<sup>nd</sup> Congr. Appl. Mech.*, Zürich, 1926, 315-327.

## 2.2. Il dibattito sull'interpretazione energetica del criterio di plasticità.

Con la successiva memoria di Schleicher i criteri energetici acquistano definitiva rilevanza. Nel saggio “Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung)” è presentata una rassegna aggiornata sul problema della condizione di plasticità senza trascurare i riferimenti storici essenziali; essa fa seguito ad una breve comunicazione intitolata “Die Energiegrenze der Elastizität (Plastizitätsbedingung)”<sup>90</sup> nella quale era stata proposta una nuova condizione energetica ivi ulteriormente sviluppata. In una nota a piè di pagina l'autore puntualizza che la maggior parte dei risultati esposti era stata oggetto della lezione inaugurale alla Technische Hochschule di Karlsruhe, intitolata “Spannungszustand, Fließgrenze und Bruchgefahr”. Notazione apparentemente marginale, ma che in realtà sembra rappresentare una risposta alla nota editoriale di von Mises, fondatore e direttore della rivista, nella quale si ribadisce che la condizione di snervamento descritta da Schleicher era già stata formulata dallo stesso von Mises nel corso di una conferenza tenuta il 17 luglio 1925 a Berlino e che essa rappresenta un semplice aggiornamento del criterio formulato nel 1913<sup>91</sup>. Non meriterebbe soffermarsi su tali questioni di priorità se ad esse non si accompagnasse una silente ma corrosiva polemica sul concetto di criterio di snervamento, che traspare chiaramente al termine della nota di von Mises: “Respingo la definizione «criterio energetico», - scrive von Mises - perché l'espressione in questione non rappresenta, per il corpo plastico, alcuna misura d'energia”<sup>92</sup>. Prima di passare ad un esame attento delle ragioni che

---

<sup>90</sup> F.Schleicher, Die Energiegrenze der Elastizität (Plastizitätsbedingung), *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 5, 478-479; in apertura l'autore nota che “Die Frage, welche Umstände bedingen bei einem bestimmten, bekannten Spannungszustande das Erreichen der Elastizitäts- bzw. der Fließgrenze, kann auch heute noch nicht eindeutig beantwortet werden, trotz der vielen Versuche, die schon zu ihrer Klärung unternommen wurden.”

<sup>91</sup> Cfr. von Mises, *op. cit.*.

<sup>92</sup> “Die Bezeichnung «Energiekriterium» lehne ich ab, da der in Frage kommende Ausdruck für den plastischen Körper kein Maß der Energie bildet”; cfr. “Nota aggiunta” all'articolo di F.Schleicher, Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung),

indussero a porre questi distinguo, consideriamo il contenuto della memoria di Schleicher. In essa è esposta una interessante panoramica sulle diverse ipotesi sino ad allora formulate, partendo dal presupposto che l'idea soggiacente a molte di esse, ossia la trascurabilità della compressione uniforme ai fini della definizione del punto di snervamento, sia stata definitivamente smentita dalle prove sperimentali, in particolare quelle eseguite da von Kármán, Böker e Lode<sup>93</sup>. Tale rimozione preliminare induce a rifiutare in toto le due ipotesi più accreditate, compresa quella di Huber. Il problema, nota l'autore, consiste nel saper distinguere tra condizioni di rottura e di plasticità, dal momento che se è vero che una compressione uniforme non porta a rottura il materiale, è altrettanto vero che esso subisce una contrazione che ne diminuisce la densità e ne varia le caratteristiche fisico-meccaniche, e quindi anche il comportamento plastico. In questo senso è necessario d'ora in poi tenere chiaramente separate le due verifiche per non incorrere in grossolani errori di valutazione. D'altra parte, come ricorda lo stesso Schleicher, la consuetudine tecnica aveva da poco imposto che nel calcolo del coefficiente di sicurezza ai fini della resistenza di un elemento strutturale, fosse inserita non la resistenza a rottura ma la tensione al limite di snervamento. Dopo una rassegna sistematica delle diverse proposte, classificate in modo leggermente differente da quello proposto da Sanden alcuni anni prima e una menzione particolare per l'ipotesi di Sandel<sup>94</sup>, secondo la quale il criterio di snervamento basato sulla tensione tangenziale massima deve essere corretto al fine di tener conto non soltanto dello scorrimento massimo ma anche dell'eventuale variazione di volume, Schleicher introduce per la prima volta in maniera sistematica il concetto di *tensione di confronto* applicato ad una equazione energetica. L'ipotesi

---

*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **6**, 199-216, 1926.  
Mises tornerà sulla questione in un importante saggio del '28: *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **8**, 161-185, 1928.

<sup>93</sup> Per von Karman e Lode cfr. note precedenti; R.Böker, *Die Mechanik der bleibenden Formänderung in kristallinisch aufgebauten Körpern*, *Mitteilungen über Forschungsarbeiten V.D.I.*, Heft 175/176, 1915.

<sup>94</sup> Sandel, *Über Festigkeitsbedingungen*, Dissertantion, Technische Hochschule Stuttgart, 1919.

del limite energetico dell'elasticità è così riformulata: la misura di riferimento per il valore della sollecitazione è il lavoro di deformazione totale  $A$ , accumulato nell'unità di volume; la tensione di confronto con la tensione limite di snervamento  $\sigma_s$  nella prova di trazione (o  $\sigma'_s$  per quella di compressione), è data dalla  $\sigma_e = \sqrt{2EA}$ . La tensione di confronto  $\sigma_e$  del limite di elasticità o di snervamento non ha, concordemente all'esperienza, un valore costante per tutti gli stati di tensione, ma è una funzione  $\sigma_e(p)$ , della tensione media:

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

oppure, ed è lo stesso, della dilatazione di volume corrispondente. La funzione  $\sigma_e(p)$ , analogamente alla curva involuppo dei cerchi delle tensioni nell'ipotesi di Mohr, deve essere determinata mediante prove su ogni singolo materiale.

Senza nascondere le difficoltà che ancora devono essere superate per giungere ad una teoria dello snervamento in grado di risolvere in modo generale il problema plastico, Schleicher è convinto che le prove sperimentali abbiano definitivamente sancito la bontà del costrutto energetico, che possiede inoltre una immediatezza applicativa difficilmente eguagliabile<sup>95</sup>.

### 2.3. La memoria di von Mises sulla plasticità dei cristalli.

Dal principio variazionale elaborato da Haar & Kármán (1909), allo studio comparato di Sanden sulle teorie energetiche, dalle osservazioni di Schleicher sul contributo del tensore sferico, ai chiarimenti sperimentali di Lode sullo stesso tema, gli studi sulla fase plastica definiscono un versante sino ad allora ignoto della meccanica dei materiali, senza riuscire, tuttavia, a consolidarne i principî. Si potrebbe anzi pensare che la straordinaria produzione di memorie, saggi e resoconti d'indagini

---

<sup>95</sup> “Doch kann man wohl schon heute mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß die Hypothese der Energiegrenze der Elastizität den Vorzug verdient, wobei ihre große Einfachheit bei den Anwendungen (Plastizitätstheorie!) ganz besonders ins Gewicht fällt.” (Cfr. Schleicher, *cit.*, 1925, p. 216).

sperimentali nasconda una intrinseca insicurezza della disciplina, sollecitata a dare risposte di carattere applicativo prima ancora di aver compreso il significato delle domande che da almeno due secoli travagliavano la ricerca.

Di tale contraddittoria situazione si fa interprete von Mises, che invita a considerare con maggior attenzione i rapporti tra macro e micromeccanica, già analizzati dal punto di vista della *Kristallphysik* da Voigt nella prolusione al Congresso Internazionale di Fisica di Parigi (1900). L'aderenza al modello della *Kontinuitätsmechanik* riafferma la predilezione per una impostazione “alla Cauchy”, contro le apparenti scorciatoie rappresentate dai metodi energetici. Una radicale contrapposizione di metodo affiora in questo contrasto, riconducibile al lungo dibattito sostenuto da Saint-Venant contro l'impostazione alla Green, alla quale veniva rimproverata una *petitio principii* di natura matematica che non aveva alcuna aderenza fisica<sup>96</sup>. Due indirizzi di pensiero si erano allora scontrati, ponendo in campo le ragioni della *Mécanique Physique*, che cercava di piegare la teoria elastica ad una “loi assez général, assez grandiose, c'est-à-dire simple”<sup>97</sup> riconducibile alle

---

<sup>96</sup> Sulla posizione di Saint-Venant riguardo questi temi cfr. E. Benvenuto e A. Becchi, *Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant*, in *Omaggio a G. Ceradini*, Roma, 1988, pp. 125-133.

<sup>97</sup> Saint-Venant, *Note du § 16 alla Théorie de l'Élasticité des corps solides de Clebsch*, Paris, 1883, p. 75. Cfr. anche Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, in *Mém. Acad. Sci. Inst.*, **8**, 1829, p. 361: “Il serait à désirer que les géomètres reprissent sous ce point de vue physique et conforme à la nature les principales questions de la mécanique. Il a fallu les traiter d'une manière tout-à-fait abstraite, pour découvrir les lois générales de l'équilibre et du mouvement; et en ce genre de généralité et d'abstraction, Lagrange est allé aussi loin qu'on puisse le concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens physiques des corps par des équations entre les coordonnées de leurs différentes points: c'est là ce qui constitue la Mécanique analytique; mais à coté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la Mécanique physique, dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires, qui transmettent d'un point à un autre l'action des forces données, et sont l'intermédiaire de leur équilibre. De cette manière, on n'aurait plus d'hypothèses spéciales à faire lorsqu'on voudra appliquer les règles générales de la mécanique à des questions particulières.”

leggi di attrazione e repulsione descritte da Newton, e della *Mécanique Analytique*, che limitandosi a imporre l'esistenza del potenziale di Green sospendeva il giudizio sulla natura delle proprietà resistenti della materia. A distanza di anni e dopo i chiarimenti forniti dalla fisica atomica con indagini sulla costituzione della materia, le due anime della disciplina riaffiorano sotto altre vesti, e ai sostenitori delle teorie energetiche vengono opposte precise e inconfutabili considerazioni sulla struttura cristallina del continuo.

Su un'altro versante, in una memoria pubblicata nel 1928, F.D.Murnaghan<sup>98</sup> critica l'ipotesi che pone, in generale, l'energia di deformazione funzione delle componenti di deformazione. Tale ipotesi, infatti, implica che l'*energy of deformation* sia funzione dei tre invarianti, cosicché il corpo risulta necessariamente elastico e isotropo. L'autore individua la causa di questa svista nel perdurante tentativo di ricondurre ogni teoria al caso delle deformazioni infinitesime<sup>99</sup>, senza porre attenzione sulla serie di conseguenze restrittive che da essa discendono, in contrasto con le verifiche sperimentali. Proprio su questi temi inciamperà non molti anni dopo la teoria della plasticità, certamente la prima a dover fare i conti con fenomeni non lineari<sup>100</sup>.

Su questi temi si soffermano due importanti saggi pubblicati nello stesso anno sulla *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, il primo dovuto a W.Jenne, che riassume la tesi di dottorato svolta sotto la guida di von Mises e

---

<sup>98</sup> F.D.Murnaghan, On the energy of deformation of an elastic solid, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **14**, 1928, 889-891.

<sup>99</sup> Murnaghan, *cit.*, p. 891: "However, and this is the point of this note, it is evident that the simplification due to the assumption that the strain is infinitesimal has been made too soon in the classical theory."

<sup>100</sup> *Ibidem*, p. 891: "However, and this is the point of this note, it is evident that the simplification due to the assumption that the strain is infinitesimal has been made too soon in the classical theory. For it has caused us to lose sight of the fact that the symmetry of the stress tensor gives us information about the nature of the function".

M.Planck<sup>101</sup> e il secondo redatto dallo stesso von Mises, nel quale viene dichiarata ed argomentata la sua definitiva scelta di campo. Jenne dimostra scarsa attenzione per lo sviluppo storico della disciplina, attribuendo a Mohr le prime ricerche sul fenomeno della rottura e dello snervamento, ma la sua esposizione è significativa perché rappresenta senza dubbio il punto di vista di von Mises. Il confronto è ridotto alle ipotesi di Mohr e von Mises e quest'ultima, riscritta nella forma originaria del 1913, con l'estensione dovuta alla riscontrata differenza tra resistenza a trazione e a compressione<sup>102</sup>, è dichiarata più attendibile in base ai risultati sperimentali descritti da Lode, mentre non vi è cenno agli altri criteri di natura energetica. L'analisi critica è esplicita e provocatoria. Come risulterà chiaro dal successivo articolo di von Mises, una venatura polemica imprime il suo segno alle ricerche sulla plasticità.

---

<sup>101</sup> W.Jenne, Räumliche Spannungsverteilungen in festen Körpern bei plastischer Deformation, *ZAMM*, 8, Heft 1, 1928, 18-44 (tesi di dottorato discussa presso la facoltà di filosofia dell'Università di Berlino); nella nota 2 di pag. 23 Jenne attribuisce a von Mises la condizione di plasticità che tiene conto della differenza tra resistenza limite a compressione e a trazione semplice ("Diese Hypothese ist zum ersten Mal von Hrn. v. Mises in einem Vortrage vor dem Ausschuß für Technische Mechanik der Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure am 17. Juli 1925 ausgesprochen worden") sollecitando la pronta risposta di Schleicher che nel numero successivo della medesima rivista (p. 160), fa apporre una nota nella quale si precisa che l'estensione dell'ipotesi della «konstanten Gestaltänderungsarbeit an der Fließgrenze» era stata da lui illustrata l'8 maggio 1925 presso la Technische Hochschule di Karlsruhe. È evidente che il problema della paternità della cosiddetta formula di von Mises rappresentava allora un contenzioso.

<sup>102</sup> Von Mises propone la nuova formula confermando tuttavia la validità della vecchia.

Von Mises propone uno studio<sup>103</sup> “sulla meccanica delle deformazioni plastiche dei cristalli”, che rivela coraggiosa ambizione d'intenti unita all'umile consapevolezza della povertà degli strumenti a disposizione. Definito il Potenziale plastico<sup>104</sup>, l'Autore richiama l'analogia tra corpi solidi e fluidi viscosi e precisa le condizioni che sono normalmente utilizzate per giungere alle equazioni del problema plastico<sup>105</sup>. Porre la divergenza del vettore velocità uguale a zero, afferma von Mises, non significa in senso stretto assumere l'invarianza di volume, ma soltanto tener presente che le variazioni rimangono dell'ordine di grandezza delle deformazioni elastiche, che sono piccole, tendenti a zero, rispetto a quelle plastiche. L'ipotesi, invece, che la tensione si mantenga al limite di elasticità durante lo snervamento, è una consapevole rinuncia a considerare il fenomeno ben noto dell'incrudimento<sup>106</sup>. Più in particolare, riguardo alla condizione di snervamento occorre utilizzare funzioni nelle sei componenti della tensione che soddisfino le seguenti condizioni:

- 
- <sup>103</sup> R. von Mises, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **8**, 161-185, 1928. L'importanza delle considerazioni sulla tessitura cristallina ai fini della definizione di una condizione di snervamento, era già stata sostenuta in precedenza; cfr., ad esempio, W.Lode, *Versuche über den Einfluß...*, *cit.*, 1926, p. 929: “Ohne die Voraussetzung der Quasiisotropie sind wir aber nicht in der Lage, die wahren Spannungen zu berechnen, und somit können wir aus den Versuchen, während deren sie nicht erfüllt war, keine Schlüsse auf die Plastizitätsbedingung der Körperelemente ziehen.”
- <sup>104</sup> Nel 1952 T.Y.Thomas riprenderà le equazioni di flusso plastico di von Mises collegandole al criterio di snervamento di Tresca, proponendo così una teoria alternativa a quella del potenziale plastico; cfr. T.Y.Thomas, *On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equations, JRMA*, **1**, 1952, 343-357.
- <sup>105</sup> Von Mises confessa in quest'occasione di aver appreso soltanto in seguito che alcune delle relazioni di flusso plastico da lui stabilite nell'articolo del '13 erano già state formulate da Lévy nel *Journ. de Mathématiques*, 1871, p. 369; cfr. von Mises, *cit.*, 182-183.
- <sup>106</sup> “Poiché si deve supporre che l'incrudimento coincida con un'alterazione della struttura cristallina, sembra impossibile che esso possa venire determinato nell'ambito della *Kontinuitätsmechanik*”.

1. i valori delle funzioni rimangono invariati, se si aggiunge allo stato di tensione una compressione idrostatica;

2. i valori delle funzioni rimangono invariati se il sistema di assi coordinati di base viene sostituito da uno cristallograficamente equivalente.

La seconda di queste condizioni afferma che l'espressione considerata deve essere indipendente dalla scelta degli assi coordinati. "Ma ricercando le funzioni di tensione che soddisfano questa condizione e considerando i loro valori tutt'al più variabili lentamente con la pressione media, si può credere di aver colto, in questo modo, l'essenziale del fenomeno di snervamento". L'attenzione si concentra su una funzione quadratica, perché le ricerche teoriche e sperimentali avevano confermato che ad essa deve essere attribuito un ruolo del tutto particolare. La forma più generale risulta:

$$(1) \quad F = \frac{1}{2} (K_{11} \sigma_x^2 + K_{22} \sigma_y^2 + \dots + K_{66} \tau_z^2) + K_{12} \sigma_x \sigma_y + \dots + K_{14} \sigma_x \tau_x + K_{56} \tau_y \tau_z$$

Essa contiene 21 diversi coefficienti  $K_{ij}$ . Se si impone (condizione 1) che F rimanga invariata aggiungendo allo stato di tensione una compressione idrostatica p, si ottengono 6 equazioni in K, del tipo

$$(2) \quad K_{11} + K_{12} + K_{13} = 0$$

e la (1) si trasforma nella:

$$(3) \quad F = -\frac{1}{2} [ K_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + K_{23} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + K_{31} (\sigma_z - \sigma_x)^2 ] + \\ - \tau_x [ K_{24} (\sigma_x - \sigma_y) + K_{34} (\sigma_x - \sigma_z) ] + \\ - \tau_y [ K_{35} (\sigma_y - \sigma_z) + K_{15} (\sigma_y - \sigma_x) ] + \\ - \tau_z [ K_{16} (\sigma_z - \sigma_x) + K_{26} (\sigma_z - \sigma_y) ] + K_{45} \tau_x \tau_y + \\ + K_{56} \tau_y \tau_z + K_{64} \tau_z \tau_x + \frac{1}{2} (K_{44} \tau_x^2 + K_{55} \tau_y^2 + K_{66} \tau_z^2)$$

In questa espressione entrano in gioco 15 coefficienti indipendenti ed essa rappresenta la più generale forma quadratica che soddisfa la prima delle due condizioni soprascritte. Nel caso di isotropia si riottiene la formula già descritta nell'articolo del 1913:

$$(4) \quad F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)$$

ritenuta ancora valida dopo le assicurazioni di Lode.<sup>107</sup> Naturalmente la condizione di snervamento risulta  $F=\text{costante}$ . Più complesso lo svolgimento che riguarda la condizione 2, nel caso in cui si ammetta la validità approssimata della condizione di Guest-Mohr. Si assumano, ad es., le due direzioni secondo gli assi  $x'$  e  $y'$  di un sistema di assi coordinati rettilinei; allora occorre calcolare  $\tau_z$  e, in generale, ossia per cristalli non triclini, la  $\tau_z=\text{costante}$  non rappresenta una condizione di snervamento che rispetti la condizione 2. Ma se si sottopone la coppia d'assi assegnata a tutte quelle rotazioni che corrispondono alle proprietà di simmetria del cristallo, si è in grado di determinare la tensione tangenziale per ogni posizione della coppia d'assi e di indicare il valore più elevato con  $\tau_{\max}$ . Allora  $\tau_{\max}=\text{costante}$  è una condizione di snervamento che soddisfa entrambe le condizioni imposte. La tensione tangenziale, infatti, non varia se si modifica lo stato di tensione con una pressione idrostatica, ed una rotazione ammissibile del sistema di coordinate lascia inalterata la  $\tau_{\max}$ . Nel caso del corpo isotropo, dove tutte le rotazioni sono ammissibili, la condizione  $\tau_{\max}=\text{costante}$  si trasforma nell'ipotesi di Guest-Mohr. Nel caso cristallino si può definire come *condizione di tensione tangenziale generalizzata* (“verallgemeinerte Schubspannungs-bedingung”), che von Mises applica ai diversi casi di simmetrie cristalline. La sua espressione analitica si può ottenere nel modo seguente: una coppia d'assi prefissata può formare con le tre direzioni principali gli angoli  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  e la corrispondente tensione tangenziale risulta:

$$(5) \quad \tau = \sigma_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sigma_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \sigma_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3$$

dove

---

<sup>107</sup> Cfr. W.Lode, Der Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle, *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, **72**, 1928, 733 (già pubblicato sul quaderno n. 303 dei *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesen*): “Das Ergebnis der Untersuchung war folgendes: Die Messungen lassen sich am besten wiedergeben durch die zuerst von Huber und unabhängig von v. Mises vorgeschlagene Gleichung.

$$\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 = 0$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  assumono tutti i valori che corrispondono alle posizioni cristallograficamente equivalenti alla coppia di assi originari, e si indica con  $\tau_{\max}$  il valore massimo della (5), allora la *condizione di tensione tangenziale generalizzata* risulta:  $\tau_{\max} = \text{costante}$ . Von Mises non si esime dal citare le interpretazioni energetiche che erano state date della funzione di snervamento e sulle quali, come abbiamo già ricordato, era sceso in campo in occasione dell'articolo di Schleicher. Si può anche sostenere, egli afferma, che il lavoro di deformazione realmente sviluppato è un estremo rispetto a tutte le quantità di lavoro che si svilupperebbero per una stessa deformazione ma per altre tensioni al limite di snervamento, ma questo nuovo principio di lavoro (“*Arbeitsprinzip*”) non ha nulla in comune con l'ingenua interpretazione della funzione di snervamento  $F$  come *energia di variazione di forma*<sup>108</sup>. La polemica è rivolta sia nei confronti del principio di minimo di Haar e Kármán, già criticato in precedenza, sia rispetto alle concezioni energetiche di Beltrami e Huber. Von Mises nota l'insufficienza delle formulazioni energetiche e fa riferimento alla sua ultima nota del '25 nella quale la condizione di snervamento è funzione della media delle tensioni normali, così come Schleicher aveva contemporaneamente proposto indipendentemente da lui. Inoltre, l'ennesimo caso di accostamento della sua condizione del '13 a quella di Huber del 1904, riportato nel testo di Nadai<sup>109</sup>, lo spinge ad un esame accurato del concetto di *Gestaltänderungsenergie* esteso al caso di corpi cristallini, per appurare se esso è applicabile anche nel caso di anisotropia del materiale. Definito il lavoro di deformazione

$$A = \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)$$

l'autore si propone il compito di suddividere i due tensori  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$  in due parti corrispondenti in modo tale che

---

<sup>108</sup> “Gestaltänderungsenergie”.

<sup>109</sup> A.Nadai, *Der bildsame Zustand der Werkstoffe*, cit..

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}'' \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}' + \mathbf{D}''$$

dove  $\mathbf{T}'$  è funzione delle componenti  $\sigma_x', \dots$ ,  $\mathbf{T}''$  di quelle  $\sigma_x'', \dots$  e, analogamente,  $\mathbf{D}'$  e  $\mathbf{D}''$  rispetto alle componenti di deformazione. Con  $\mathbf{D}''$  viene indicata una deformazione a volume costante, affinché valga la relazione fissata in precedenza

$$e_x'' + e_y'' + e_z'' = 0$$

Devono inoltre valere le scomposizioni

$$\frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{T}' \mathbf{D}' + \frac{1}{2} \mathbf{T}'' \mathbf{D}''$$

$$2A = \mathbf{T} \mathbf{D} = (\mathbf{T}' + \mathbf{T}'') (\mathbf{D}' + \mathbf{D}'') = \mathbf{T}' \mathbf{D}' + \mathbf{T}'' \mathbf{D}'' + (\mathbf{T}' \mathbf{D}'' + \mathbf{T}'' \mathbf{D}')$$

Attraverso semplici passaggi von Mises dimostra l'annullamento dell'ultima somma in parentesi e afferma di aver così ottenuto la condizione che deve essere rispettata affinché la scomposizione proposta sia ammissibile: il tensore delle tensioni deve poter essere scomposto in modo tale che la prima parte corrisponda ad una compressione o trazione uniforme e la seconda ad una deformazione a volume costante<sup>110</sup>. Non valgono, però, in generale le proprietà caratteristiche dei corpi isotropi, ossia che la seconda parte del tensore delle tensioni presenti compressione media nulla e che alla prima corrisponda una deformazione senza variazione di forma. Di conseguenza non si può più parlare di una suddivisione in lavoro di deformazione di volume e di forma. È facile inoltre dimostrare che in generale il lavoro di variazione di forma corrisponde ad un'espressione quadratica con 15

---

<sup>110</sup> Tale dimostrazione era tenuta in particolare conto dall'autore, tanto è vero che in una nota annessa viene precisato che "Diese Zerlegungsvorschrift hat unabhängig von mir Hr. A. Reuß in Budapest gefunden und mir in einem Brief im Dezember 1927 mitgeteilt. Weitere Ausführungen von Hrn. Reuß sollen später hier veröffentlicht werden." (p. 171, nota 1).

costanti indipendenti  $s''_{ij}$ , analoga a quella descritta a proposito della più generale condizione di snervamento:

$$\begin{aligned}
 A_g = & -\frac{1}{2} [ s''_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + s''_{23} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + s''_{31} (\sigma_z - \sigma_x)^2 ] + \\
 & - \tau_x [ s''_{24} (\sigma_x - \sigma_y) + s''_{34} (\sigma_x - \sigma_z) ] + \\
 & - \tau_y [ s''_{35} (\sigma_y - \sigma_z) + s''_{15} (\sigma_y - \sigma_x) ] + \\
 & - \tau_z [ s''_{16} (\sigma_z - \sigma_x) + s''_{26} (\sigma_z - \sigma_y) ] + s''_{45} \tau_x \tau_y + \\
 & + s''_{56} \tau_y \tau_z + s''_{64} \tau_z \tau_x + \frac{1}{2} (s''_{44} \tau_x^2 + s''_{55} \tau_y^2 + s''_{66} \tau_z^2)
 \end{aligned}$$

Non è tuttavia possibile sostituire la condizione  $F = \text{costante}$ , con quella  $A_g = \text{costante}$ . Le due espressioni, infatti non coincidono: nei corpi isotropi  $A_g$  contiene una sola costante e quindi  $F$  e  $A_g$  possono ricondursi allo stesso principio, ma nei corpi cristallini la stessa espressione contiene almeno due costanti indipendenti (nel caso di sistema regolare esattamente due), il cui quoziente definisce il comportamento del materiale nel campo elastico, e non si comprende perché gli stessi valori debbano risultare significativi per  $F$ , che fa riferimento soltanto alla fase di snervamento. La conclusione è che l'utilizzo dell'energia di variazione di forma come funzione di snervamento è accettabile soltanto nel caso di isotropia e, quindi, se si è in cerca di una formulazione generale, occorre partire da altre premesse, giacché quelle energetiche si rivelano soltanto casi particolari oggettivamente infondati<sup>111</sup>. La trattazione del caso generale è appena abbozzata e lo stesso von Mises conclude il lavoro sottolineando le difficoltà che si frappongono ad una soluzione del problema “nell'attuale incertezza relativa ai fondamenti essenziali delle formulazioni esposte”<sup>112</sup>. Ad un'analogia conclusione era giunto P.W.Bridgman due anni prima, a

<sup>111</sup> Von Mises, *ivi*, 1928, p. 172: “daraus darf man wohl den Schluß ziehen, daß die Deutung meiner Fließbedingung für isotrope Körper als Hypothese von der «Konstanz der Gestaltänderungsenergie», jedenfalls aber das Übergang dieser Auffassung auf Kristalle, sachlich nicht begründet ist”.

<sup>112</sup> *Ivi*, p. 185: “Hier liegt in der Tat eine Lücke vor, die durch das Zusammentreffen der makroskopischen Theorie der Kontinuitätsmechanik mit den mikroskopischen Anschauungen der

conferma di una situazione di stallo che si era creata dopo due decenni di instancabili ricerche: “These examples are sufficient to show that none of the usual criteria of rupture can apply, either to brittle or plastic materials. (...). The theoretical considerations, as well as the experimental facts summarized above, indicate therefore that we should attempt to establish general criteria of rupture only as a matter of practical convenience, as for engineering purposes, and that we should expect any such criteria to be valid only in a narrow range of conditions, both of stress and material.”<sup>113</sup>

---

Kristalltheorie bedingt wird. Bei der gegenwärtigen Unsicherheit hinsichtlich fast aller wesentlichen Grundlagen (...) lohnt es jedoch nicht, auf die Fragestellungen, die an diesem Punkt einsetzen, näher einzugehen”.

<sup>113</sup> P.W.Bridgman, Some mechanical properties of matter under high pressure, *Proc. II Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 1926, 53-61.

#### 2.4. La “crisi della meccanica”.

Le osservazioni di von Mises tentano di spezzare un orientamento interpretativo che risulterà vincente negli anni successivi. Nonostante l'evidente contrasto sulle ipotesi di base, infatti, la triade Huber-von Mises-Hencky individuerà d'ora in poi un unico criterio di plasticità. Tale associazione, assolutamente arbitraria dal punto di vista della genesi storica della *Plastizitätstheorie*, ha la sua giustificazione nella sostanziale omogeneità “operativa” dei tre criteri: spogliati dalle rispettive cornici interpretative, le tre formulazioni si “equivalgono” e consentono di nascondere i contrasti di fondo in nome di una fittizia convergenza *de facto*.

Sin dai primi articoli pubblicati sulla *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, von Mises aveva avvertito il peso della complessità dei temi affrontati cercando di individuare alcune vie d'uscita che sapessero salvare le peculiarità dei singoli fenomeni esaminati senza perdere in generalità. Non è un caso che nell'articolo di apertura del primo numero della rivista, intitolato “Sull'attuale crisi della meccanica”, e in un altro di poco posteriore, la plasticità risulti un tema dominante. Von Mises si chiede sino a che punto la teoria della plasticità possa fare a meno di considerare idealizzazioni che prescindano da una descrizione accurata dell'incrudimento (*Verfestigung*) e, soprattutto, come sia possibile conciliare le equazioni generali del problema con le caratteristiche microstrutturali dei materiali esaminati, nei quali la tessitura cristallina svolge un ruolo determinante. Si fa strada la convinzione che le teorie fenomenologiche debbano confrontarsi con quelle microstrutturali, per giungere ad un approccio compatibile con le diverse nuove cognizioni sulla costituzione della materia. Nella General Lecture presentata al Congresso di Meccanica applicata di Stoccolma (1930) tornerà sull'argomento per sostenere la necessità di intraprendere nuove strade di ricerca, senza escludere una revisione della propria impostazione e un'apertura verso soluzioni alternative già elaborate - ad esempio quella di Haar & Kármán criticata nell'articolo del 1913. L'analisi proposta non nasconde i limiti dell'impostazione tradizionale. Da questo punto di vista la teoria della plasticità, allora in piena evoluzione, è considerata esempio probante di quanto ancora resti da fare per dare chiarezza ed organicità ai risultati raggiunti e ad essa è dedicata la maggior parte dell'esposizione, che mette bene in chiaro natura e caratteristiche dei singoli contributi sul tema, al fine di

mostrare le difficoltà che impediscono una trattazione generale del problema. Le riflessioni non sono limitate alla teoria della plasticità, ma significativamente trovano in essa un riferimento paradigmatico, come è testimoniato dal passo conclusivo della relazione di von Mises, talvolta citato per il suo respiro generale e per noi oltremodo indicativo dello stato dell'arte all'inizio degli anni '30. In esso l'autore affronta il problema dei legami tra le indagini di laboratorio e gli sforzi compiuti dalla meccanica razionale per giungere ad una spiegazione del comportamento meccanico dei corpi reali, denunciando la disordinata proliferazione di risultati sperimentali privi di adeguate teorie di riferimento<sup>114</sup>.

In questi anni sembra avverarsi la pericolosa frattura tra meccanica applicata e indispensabili interpretazioni teoriche paventata da Klein durante la memorabile disputa sul ruolo da attribuire alle scienze esatte nelle facoltà tecnico-scientifiche. Non è un caso che sia proprio Göttingen, patria di fondamentali studi sull'argomento, il centro di ricerca scientifica voluto da Klein sin dalla fondazione della *Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik*. Al progetto dell'insigne scienziato fu rimproverata una pericolosa tendenza all'*Amerikanismus und Verrat an der Wissenschaft* e soltanto dopo un lungo e sofferto dibattito si giunse nel 1895 alla cosiddetta *Aachener Frieden*. La coraggiosa proposta di Klein<sup>115</sup>, inscritta in un progetto più vasto testimoniato dall'ampliamento dell'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* al fine di inglobare le applicazioni nel campo della

---

<sup>114</sup> “Ich glaube, daß wir den Fortschritt zunächst auf andere Weise suchen müssen: durch sorgfältige Beachtung der logischen Grundlagen der Theorie und der bisherigen mathematischen Ansätze, deren Ausgestaltung allein dazu führen kann, die experimentelle Forschung in geordnete und fruchtbare Bahnen zu leiten.” (in R. von Mises, *Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua*, *Proc. III Int. Congr. Appl. Mech.*, 4-11, Stoccolma 1930).

<sup>115</sup> Al riguardo cfr. F.Klein, *Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen*, Vortrag gehalten am 6. December 1895 im Hannover'schen Bezirksverein des Vereins deutscher Ingenieure, (estratto); anche R. von Mises, Felix Klein. Zu seinem 75. Geburtstag am 25. April 1924, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 4, 1925, 86-92.

meccanica, fu oggetto di facili strumentalizzazioni su opposti versanti. In particolare, la straordinaria raccolta di dati sperimentali favorita dalla creazione dei nuovi laboratori di prova, minacciò di nascondere le incertezze sui fondamenti teorici. La fragilità degli assunti di base della teoria della plasticità sembrava amplificare un fenomeno parossistico che induceva ad accumulare dati sperimentali senza aver la capacità di ordinarli e dar loro un senso. Di tutto ciò si avverte l'eco nel monito di von Mises, ormai rivolto ad un fenomeno difficilmente confinabile al New World.

### 2.5. Burzynski.

Per apprezzare il valore delle osservazioni di von Mises occorre ampliare l'orizzonte dello stato della ricerca intorno agli anni '30<sup>116</sup> e prendere in considerazione un ampio saggio di W. Burzynski<sup>117</sup> che dà risonanza ad un lavoro precedente dello stesso autore<sup>118</sup> nel quale era presentata una nuova condizione di snervamento. Nella memoria sono illustrati tutti i principali criteri di resistenza senza distinguere con precisione quelli riferiti ai materiali duttili o fragili. La critica è rivolta, in particolare, contro il criterio di Sandel che pone la condizione di snervamento funzione della “veränderlichen, kritischen Querverzerrung” ed è definita dall'autore “ganz unkorrekt” in base al confronto con tre diversi stati di sollecitazione che la teoria di Sandel dovrebbe indicare come equivalenti, mentre in realtà non lo sono. Segue, quindi, la descrizione del nuovo criterio secondo il quale la misura della

---

<sup>116</sup> Accanto a questi contributi dovrebbero esserne annoverati altri che danno il via alle applicazioni delle teorie plastiche nel campo della meccanica delle strutture. Cfr. J.Heyman, “The development of plastic theory 1936-'48: some notes for a historical sketch”, in *Instability and plastic collapse of steel structures*, Proc. Michael R. Horne Conference, 1983, 1-8. Anche G.Ceradini, *Sviluppi ed implicazioni strutturali della teoria della plasticità*, AIMETA, Trieste 1984, dattiloscritto.

<sup>117</sup> W.Burzynski, Über die Anstrengungshypothesen, *Schweizerische Bauzeitung*, **94**, 1929, 259-262.

<sup>118</sup> W.Burzynski, *Studien über die Anstrengungshypothesen*, Verlag der Akademie der technischen Wissenschaften, Lwow 1928.

sollecitazione *locale* di un corpo isotropo nel campo elastico e plastico è rappresentata dalla somma della densità della *pseudoenergia* di variazione di forma e da una certa parte della *pseudoenergia* di variazione di volume, che dipende dallo stato di sollecitazione e dalle particolari proprietà del materiale. Con il termine *locale* si intende che è preso in considerazione il caso di uno stato di tensione disomogeneo (“ungleichmässig”) per valutare la sollecitazione in un punto, e non la sua dipendenza dalla sollecitazione totale alla quale il corpo è sottoposto. Il suffisso *pseudo* indica che le funzioni  $\Phi_f$ ,  $\Phi_v$ , che solitamente indicano, rispettivamente, l'energia di variazione di forma e di volume, per certi materiali non definiscono alcuna espressione energetica. Sulla scorta di queste puntualizzazioni, viene posto il nuovo criterio di plasticità nella forma

$$\Phi_f + \alpha \Phi_v = K$$

che esprime la dipendenza della condizione di snervamento dalla media delle tensioni normali, in funzione di un coefficiente  $\alpha$  che tiene conto della differenza di resistenza a trazione e a compressione. Definiti i seguenti tre stati di sollecitazione

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = K_z & \sigma_2 = 0 & \sigma_3 = 0 \\ \sigma_1 = 0 & \sigma_2 = 0 & \sigma_3 = -K_d \\ \sigma_1 = K_s & \sigma_2 = 0 & \sigma_3 = -K_s \end{array}$$

e il coefficiente di plasticità

$$v = \frac{K_d K_z}{2 K_s^2} - 1$$

si ottiene l'espressione generale:

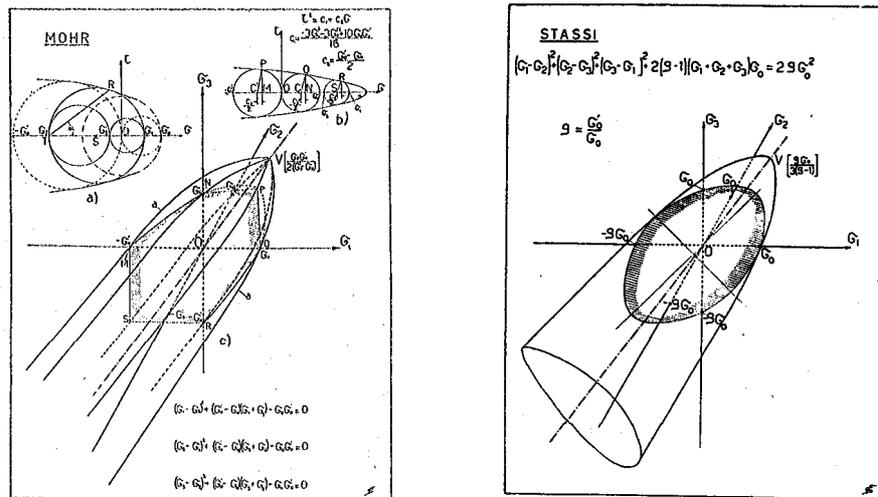
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2v(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) + (K_d - K_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = K_d K_z$$

Un'espressione analoga sarà riproposta da Stassi-d'Alia nel 1951, con l'intento di aggiornare il criterio di Schleicher imponendo che l'“energia di distorsione sia funzione lineare della tensione media e che, nello stesso tempo, sia funzione dei

valori relativi dei limiti elastici alla compressione e alla trazione semplice”<sup>119</sup>. Stassi-d'Alia parte dal presupposto che aveva già guidato von Mises, ossia che “per un principio di intuitiva interpretazione di una legge fisica” la superficie di snervamento non possa presentare discontinuità; ciò che accade, ad esempio, alla condizione di Mohr, per la quale si ottiene, nel piano delle tensioni principali  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , una superficie con sei spigoli vivi che “non può corrispondere ad alcun significato fisico reale”. L'Autore propone la condizione:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(\rho - 1) \sigma_0 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2 \rho \sigma_0^2$$

dove  $\rho = \frac{\sigma_0'}{\sigma_0}$ , con  $\sigma_0', \sigma_0$  tensioni limite di elasticità a compressione e a trazione semplice, alla quale corrisponde un paraboloido di rivoluzione che può essere considerato una generalizzazione della superficie corrispondente alla condizione di Mohr.



Di un certo interesse sono anche le brevi considerazioni generali che Burzynski svolge nel seguito, laddove si consiglia di rinunciare al concetto di energia riguardo le condizioni di snervamento e di scegliere nuove ipotesi, dal momento che

<sup>119</sup> Cfr. F.Stassi-d'Alia, Un paraboloido di rivoluzione quale condizione di plasticità, *L'Ingegnere*, 1951; idem, Origini e sviluppi delle teorie sulla plasticità, *Atti Acc. Sci.*, Palermo, 14, 1954, 45-102; idem, *Teoria della plasticità*, Palermo, 1958. L'autore non cita Burzynski.

quelle note sembrano aver esaurito la loro capacità di interpretazione dei fenomeni esaminati. Burzynski non cita i lavori di von Mises, ma osserviamo nella sua analisi una analoga consapevolezza dello stallo in cui la teoria dei criteri di snervamento era venuta a trovarsi. Una sorta di punto di non ritorno era stato raggiunto, oltre il quale si poteva semplicemente insistere sulle formulazioni consolidate oppure procedere ad una critica radicale dei fondamenti comunemente accettati come ovvî. Su queste due piste si muoverà la ricerca successiva determinando un divario profondo tra le due istanze conoscitive. Prova immediata, anche in termini temporali, è l'accesa discussione che fa seguito all'articolo di Burzynski. Sulla stessa rivista, Sandel difende l'intenzione di tener conto della tensione media, confermata dalle esperienze di laboratorio, e introduce una nuova condizione di snervamento in funzione delle deformazioni principali:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \text{costante}$$

che nello spazio delle tensioni principali si esprime nella condizione:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4m-2}{m^2+2} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = K_z^2$$

La replica di Burzynski, deciso a rimanere sulle sue posizioni, pur apprezzando la nuova formulazione, costringe Sandel ad una breve, irritata precisazione ed infine ad esporre in un lungo articolo le ragioni delle diverse ipotesi, specificando gli obiettivi proposti dalle singole teorie. Ancora una volta l'autore sottolinea la distinzione tra condizioni di snervamento e di rottura, consapevole della confusione che su di esse era stata fatta nel passato. La maggior parte della trattazione è quindi dedicata a queste ultime, giacché tale voleva essere il tema del primo articolo di Burzynski, mentre l'analisi dei criteri di plasticità si riduce alla riproposizione del criterio dell'energia di variazione di forma. L'autore si limita a ricordare che l'espressione da lui proposta coincide con quest'ultima nel caso in cui si ponga  $m = 2$ . Sulla generalità della questione Sandel afferma che le ipotesi eventualmente introdotte sono corrette e applicabili se corrispondono ai risultati di laboratorio e non inducono a

contraddizioni teoretiche. Affermazione solo apparentemente banale, come vedremo in seguito analizzando le nuove posizioni degli anni '50.

## 2.6. Olszak e Urbanowski.

Le principali condizioni di snervamento ancora oggi utilizzate, dalle quali deriveranno molteplici variazioni, sono ormai completamente definite<sup>120</sup>. Non resta che estenderne la portata ai casi di non omogeneità materiale in presenza di anisotropia. Si deve a Olszak e Urbanowski<sup>121</sup> la prima formulazione completa in

---

<sup>120</sup> Tra le numerose “rivisitazioni” ci limitiamo a ricordare C.Torre, Über den plastischen Körper von Prandtl. Zur Theorie der Mohrschen Grenzkurve, *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **1**, 1947, 36-50; idem, Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließ- und Bruchgrenze, *ibidem*, pp. 316-342. È superfluo ricordare che a partire dagli anni '50 inizia una nuova fase di ricerche che richiederebbe uno studio *ad hoc*. Per i fondamentali contributi di Sokolowskij, Hill, Batdorf, Budiansky, Koiter, Phillips, Hodge e tanti altri, rimandiamo alle indicazioni essenziali contenute nella Bibliografia e alla letteratura specialistica (per uno “stato della ricerca” esteso all'inizio degli anni '60 cfr., ad esempio, W.Olszak, Z.Mroz, P.Perzyna, *Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity*, London-New York, 1963). Per il successivo sviluppo dei temi qui trattati risultano particolarmente interessanti i seguenti saggi: A.C.Pipkin, S.Rivlin, Mechanics of Rate-Independent Materials, *ZAMM*, **16**, 1965, 313-327; D.R.Owen, Thermodynamics of materials with elastic range, *ARMA*, **31**, 1968, 91-112; M.Silhavy, On transformation laws for plastic deformations of materials with elastic range, *ARMA*, **63**, 1977, 169-182; M.Lucchesi, P.Podio-Guidugli, Materials with Elastic Range: A Theory with a View toward Applications, *ARMA*, parte I, **102**, 23-43, 1988, parte II, **110**, 9-42, 1990, parte III, **117**, 53-96, 1992; O.W.Dillon, Jr., A Thermodynamic Basis of Plasticity, *Acta Mechanica*, **3**, 182-195, 1967; J.Christoffersen, Equilibrium and Stability of Elastic-Plastic Bodies, in (H.Leipholz ed.) *Instability of continuous Systems*, IUTAM Symposium Herrenalb September 8-12, 1969, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971, pp. 317-328; A.Paglietti, Thermodynamic Nature and Control of the Elastic Limit in Solids, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **24**, 571-583, 1989.

<sup>121</sup> Cfr. i numerosi lavori pubblicati sul *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* (cl. IV) tra il 1954 e il 1957.

questa direzione, che riprende gli spunti energetici di Huber e Hencky e sviluppa le intuizioni di von Mises. L'intento dei due autori è quello di ricondurre anche i corpi anisotropi ad una condizione di plasticità analoga a quella di Huber, tenendo presente che non è possibile, nel caso generale di anisotropia, scomporre l'energia di deformazione nella componente sferica e in quella distorcente, come già segnalato da von Mises. Si può, tuttavia, ottenere una scomposizione analoga, suscettibile delle medesime interpretazioni descritte in precedenza, introducendo *due* distinte generalizzazioni del concetto di energia distorcente.

Si suppone che il corpo sia anisotropo e non omogeneo e che valgano le note relazioni

$$\sigma_{kl} = E_{kl\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \quad \varepsilon_{kl} = \tilde{E}_{kl\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$$

dove E ed  $\tilde{E}$  sono funzioni del punto P (x,y,z) considerato.

L'energia potenziale elastica può essere scritta nella forma

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} = \frac{1}{6} \sigma' \varepsilon' + \frac{1}{2} s_{\kappa\lambda} e_{\kappa\lambda}$$

dove  $\sigma'$ ,  $\varepsilon'$  denotano gli invarianti:

$$\varepsilon' = \delta_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} \quad \sigma' = \delta_{\kappa\lambda} \sigma_{\kappa\lambda}$$

e  $s_{\kappa\lambda}$ ,  $e_{\kappa\lambda}$  i tensori deviatorici.

A questo punto è possibile ottenere una generalizzazione della scomposizione in energia di variazione di volume ed energia deviatorica

$$\Phi = \Phi_V^* + \Phi_f^*$$

introducendo due tensori di anisotropia, di primo e secondo tipo. Le coordinate del tensore di anisotropia del primo tipo,  $A_{klmn}$ , sono dedotte dalla relazione:

$$E_{klmn} = \lambda^* A_{kl\mu\nu} A_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu} + 2 \mu^* A_{klmn}$$

dove  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  sono costanti materiali definite dalle espressioni (costanti di Lamé generalizzate)

$$\lambda^* = \frac{1}{6} (E_{\kappa\lambda\mu\nu} \delta_{\mu\nu} - E_{\kappa\lambda\kappa\lambda}) \delta_{\kappa\lambda}$$

$$\mu^* = \frac{1}{4} (E_{\kappa\lambda\kappa\lambda} - \frac{1}{3} E_{\kappa\lambda\mu\nu} \delta_{\mu\nu}) \delta_{\kappa\lambda}$$

Valgono per il tensore  $A_{klmn}$  le stesse note proprietà di simmetria soddisfatte dai tensori  $E_{klmn}$  e  $\tilde{E}_{klmn}$ . Si può allora scrivere la relazione

$$A_{klmn} = \frac{1}{2\mu^*} [E_{klmn} - \frac{\lambda^*}{(3\lambda^* + 2\mu^*)^2} E_{kl\mu\nu} E_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu}]$$

alla quale sono legati gli invarianti

$$\varepsilon'^* = A_{\kappa\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu} \quad \varepsilon''^* = A_{\kappa\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu}$$

e l'invariante addizionale, funzione dei primi due:

$$e''^* = \varepsilon''^* - \frac{1}{3} (\varepsilon'^*)^2$$

dai quali derivano facilmente le espressioni di  $\Phi_v^*$  e  $\Phi_f^*$  nel caso di anisotropia del primo tipo

$$\Phi_v^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} (3\lambda^* + 2\mu^*) (\varepsilon'^*)^2 \right]$$

e

$$\Phi_f^* = \frac{1}{2} (2\mu^* e''^*)$$

Per l'anisotropia di secondo tipo si ha invece:

$$\tilde{E}_{klmn} = \frac{1}{9V^*} \left(1 - \frac{3V^*}{2G^*}\right) \tilde{A}_{kl\mu\nu} \tilde{A}_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2G^*} \tilde{A}_{klmn}$$

dove  $V^* = V^*(P)$  è il modulo generalizzato dell'espansione di volume e  $G^* = G^*(P)$  il modulo tangenziale generalizzato, definiti dalle equazioni:

$$\frac{1}{V^*} = \tilde{E}_{\kappa\lambda\mu\nu} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{G^*} = \left(\tilde{E}_{\kappa\lambda\kappa\lambda} - \frac{1}{3} \tilde{E}_{\kappa\lambda\mu\nu} \delta_{\mu\nu}\right) \delta_{\kappa\lambda}$$

dove valgono le consuete relazioni di simmetria.

Allora il tensore  $\tilde{A}_{klmn}$  può essere riscritto nella forma seguente:

$$\tilde{A}_{klmn} = 2G^* \left[\tilde{E}_{klmn} - V^* \left(1 - \frac{3V^*}{2G^*}\right) \tilde{E}_{kl\mu\nu} \tilde{E}_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu}\right]$$

Analogamente a quanto svolto in precedenza si può definire l'invariante:

$$s^{**} = \sigma^{**} - \frac{1}{3} (\sigma^{**})^2$$

e le due quantità

$$\tilde{\Phi}_{v^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9V^*} (\sigma^{**})^2\right]$$

e

$$\tilde{\Phi}_{f^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2G^*} s^{**}\right)$$

la cui somma corrisponde all'energia di deformazione totale.

Risulta evidente che la decomposizione proposta per il caso anisotropo *non può essere unica*, giacché, in generale

$$\Phi_{v^*} \neq \tilde{\Phi}_{v^*} \quad \text{e} \quad \Phi_{f^*} \neq \tilde{\Phi}_{f^*}$$

Si può affermare che:

1. il valore di  $\Phi_f^*$  non cambia se la dilatazione unitaria dell'elemento materiale è la stessa in tre direzioni perpendicolari;

2. il valore di  $\tilde{\Phi}_f^*$  non cambia se l'elemento è soggetto a pressione idrostatica.

Le quantità  $\Phi_f^*$  e  $\tilde{\Phi}_f^*$  sono uguali, se e solo se

$$E_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} = C_0 \delta_{mn} ; \quad \tilde{E}_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} = \frac{1}{C_0} \delta_{mn}$$

dove  $C_0$  rappresenta una costante materiale; tali relazioni sono ovviamente soddisfatte nel caso di corpi isotropi. Una forma più semplice delle due energie di deformazione si ottiene introducendo due nuovi tensori, che soddisfano alle usuali condizioni di simmetria:

$$S_{klmn} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e^{**}}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{mn}} = A_{klmn} - \frac{1}{3} A_{kl\mu\nu} A_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu}$$

$$\tilde{S}_{klmn} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s^{**}}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{mn}} = \tilde{A}_{klmn} - \frac{1}{3} \tilde{A}_{kl\mu\nu} \tilde{A}_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu}$$

da cui le nuove espressioni

$$\Phi_f^* = \frac{1}{2} (2\mu^* S_{\kappa\lambda\mu\nu} \epsilon_{\kappa\lambda} \epsilon_{\mu\nu})$$

$$\tilde{\Phi}_f^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2G^*} \boxed{\hspace{10em}}_{\kappa\lambda\mu\nu} \sigma_{\kappa\lambda} \sigma_{\mu\nu} \right)$$

È inoltre possibile ottenere una relazione diretta tra i tensori  $S_{klmn}$ ,  $E_{klmn}$ , e  $\tilde{S}_{klmn}$ ,  $\tilde{E}_{klmn}$ , mediante le relazioni:

$$S_{klmn} = \frac{1}{2\mu^*} \left[ E_{klmn} - \frac{1}{3(3\lambda^* + 2\mu^*)} E_{kl\mu\nu} E_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu} \right]$$

$$\tilde{S}_{klmn} = 2G^* [\tilde{E}_{klmn} - V^* \tilde{E}_{kl\mu\nu} E_{\kappa\lambda mn} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\mu\nu}]$$

In conclusione si ottengono due possibili generalizzazioni del *criterio di Huber* esteso ai corpi isotropi non omogenei:

$$e^{**} = \frac{[K(P)]^2}{\mu^*}$$

$$s^{**} = 4G^* [ (P)]^2$$

ovvero

$$\frac{\mu^*(P)}{[K(P)]^2} S_{\kappa\lambda\mu\nu}(P) \varepsilon_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\mu\nu} = 1$$

$$\frac{1}{4G^*(P)[ (P)]^2} \tilde{S}_{\kappa\lambda\mu\nu}(P) \sigma_{\kappa\lambda} \sigma_{\mu\nu} = 1$$

che consentono un immediato confronto con la condizione descritta da von Mises.

Nello stesso anno Olszak e Urbanowski pubblicano sul *Bulletin*<sup>122</sup> un altro saggio nel quale vengono analizzate le proprietà del potenziale plastico proposto da von Mises (1928), generalizzato ai corpi non omogenei. Definito il potenziale plastico nella forma<sup>123</sup>:

---

<sup>122</sup> W.Olszak & W. Urbanowski, The tensor of moduli of plasticity, *Bulletin Acad. Polonaise Sci.*, cl. IV, **5**, 1957, 39-45; all'anisotropia curvilinea nel caso di materiali non omogenei, è dedicato un lavoro successivo: W.Olszak & W. Urbanowski, The flow function and the yield condition for non-homogeneous orthotropic bodies, *Bulletin Acad. Polonaise Sci.*, cl. IV, **5**, 1957, 191-203.

<sup>123</sup> W.Olszak & W. Urbanowski, The plastic potential and generalised distortion energy in theory of non-homogeneous and anisotropic elastic-plastic bodies, *Arch. Mech. Stos.*, **8**, 1956, 671. L'espressione (1) è quella descritta da von Mises; cfr. von Mises, *cit.*, 1913.

$$\begin{aligned}
(1) \quad F = & \frac{1}{2} [K_{23}(P) (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + K_{34}(P) (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + K_{42}(P) (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2] - \\
& - \sigma_{23} [K_{21}(P) (\sigma_{11}-\sigma_{22}) + K_{34}(P) (\sigma_{11}-\sigma_{33})] - \\
& - \sigma_{31} [K_{35}(P) (\sigma_{22}-\sigma_{33}) + K_{45}(P) (\sigma_{22}-\sigma_{11})] - \\
& - \sigma_{12} [K_{16}(P) (\sigma_{33}-\sigma_{11}) + K_{26}(P) (\sigma_{33}-\sigma_{22})] + \\
& + K_{45}(P) \sigma_{23} \sigma_{31} + K_{56}(P) \sigma_{31} \sigma_{12} + K_{64}(P) \sigma_{12} \sigma_{23} + \\
& + \frac{1}{2} [K_{44}(P) \sigma_{23}^2 + K_{55}(P) \sigma_{31}^2 + K_{66}(P) \sigma_{12}^2]
\end{aligned}$$

dove  $K_{ij}(P)$  indicano le costanti materiali variabili da punto a punto. Il problema è considerato nel caso più generale di anisotropia curvilinea, ossia nel caso in cui risultano 15 costanti materiali diverse da zero. La *flow function* può essere riscritta nella forma

$$(2) \quad \Phi = \frac{1}{2} H_{\kappa\lambda\mu\nu}(P) \sigma_{\kappa\lambda} \sigma_{\mu\nu}$$

dove tutte le quantità sono riferite ad un sistema cartesiano di assi e il tensore del quarto ordine  $H_{\kappa\lambda\mu\nu}$  (*tensor of moduli of plasticity*), soddisfa le condizioni di simmetria maggiore e minore. Si dimostra che la (2) corrisponde alla (1) nell'ipotesi di incompressibilità del corpo, e quindi la condizione di snervamento può essere riscritta nella doppia forma:

$$2\Phi = H_{\kappa\lambda\mu\nu}(P) \sigma_{\kappa\lambda} \sigma_{\mu\nu} = 1$$

oppure

$$\begin{aligned}
& [K_{23}(P) (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + K_{34}(P) (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + K_{42}(P) (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2] - \\
& - \sigma_{23} [K_{21}(P) (\sigma_{11}-\sigma_{22}) + K_{34}(P) (\sigma_{11}-\sigma_{33})] - \\
& - \sigma_{34} [K_{35}(P) (\sigma_{22}-\sigma_{33}) + K_{45}(P) (\sigma_{22}-\sigma_{11})] - \\
& - \sigma_{42} [K_{16}(P) (\sigma_{33}-\sigma_{11}) + K_{26}(P) (\sigma_{33}-\sigma_{22})] + \\
& + K_{45}(P) \sigma_{23} \sigma_{31} + K_{56}(P) \sigma_{31} \sigma_{12} + K_{64}(P) \sigma_{12} \sigma_{23} + \\
& + \frac{1}{2} [K_{44}(P) \sigma_{23}^2 + K_{55}(P) \sigma_{31}^2 + K_{66}(P) \sigma_{12}^2] = 1
\end{aligned}$$

Resta da spiegare la discrepanza rispetto alla condizione di snervamento descritta nell'articolo precedente, poiché in questo caso il criterio presuppone la conoscenza delle 15 costanti materiali caratteristiche dello stato plastico. Gli autori dimostrano che la condizione di snervamento basata sul valore limite dell'energia di distorsione corrisponde alle condizioni sopradescritte se è soddisfatta la seguente equazione:

$$H_{klmn}(P) = \frac{\sigma_{klmn}(P)}{4G^*(P)[K(P)]^2} \quad (\text{con } k,l,m,n = 1,2,3)$$

la cui validità deve essere confermata dalle prove di laboratorio<sup>124</sup>.

---

<sup>124</sup> Tra le molte proposte successive ricordiamo il tentativo di unificazione formulato da M. Maitra e K. Majumdar nell'articolo "Unified plastic yield criterion for ductile solids" (American Inst. Aeronautics and Astronautics, **11**, 1973, 1428-1429); in particolare p. 1428: "The basic hypothesis in the theory of plasticity is that there exists a scalar function of stresses which characterizes the yielding of materials. This scalar function, also called the yield function,  $f(s_{ij})$  generates a closed surface in the stress space by a relation  $f(s_{ij}) = 0$ . (...). All the classical failure theories, e.g., those of Tresca, von Mises, and Reuss, give conflicting predictions of the yield stresses of metals even for such simple cases of pure torsion or elongation. The reason for the conflicts in these theories is that these theories essentially form one-parameter yield surfaces. So fitting these criteria on tensile tests alone make these incompatible with the torsion test data, and vice versa. These theories also do not predict the failure under hydrostatic compression. (...). The proposed theory, on the other hand, forms a multiparameter yield surface. Here a start is made from the basic yield point data from both tensile and torsion test experiment, as well as the hydrostatic compression test. Thus the present theory can predict yielding under hydrostatic pressure while posing no conflict between theory and, at least, the basic tension and torsion experiments. The formulation is flexible enough to satisfy a large number of the available experimental data on the yield point and subsequent flow for ductile materials, and includes both ideally plastic and strain-hardening solids. The yield surface generated is invariant with respect to rotation of coordinate axes, a necessary requirement for

CAPITOLO III  
VERSO UNA NUOVA TEORIA DELLA PLASTICITÀ

3.1. *Le “strutture sensibili” di Smekal.*

Le riflessioni di von Mises ricordate in precedenza prefigurano un dialogo serrato tra programmi di ricerca complementari fra loro; essi dimostrano che la teoria della plasticità non può limitarsi a modellare le sue formulazioni sulla falsa riga della teoria classica dell'elasticità, e deve dare una risposta agli imbarazzanti interrogativi che sollecitano un confronto diretto con le nuove acquisizioni della fisica dello stato solido<sup>125</sup>.

Nella seconda metà degli anni '20 Polanyi e Schmid forniscono i dati sperimentali relativi alla tensione tangenziale critica per un cristallo perfetto - noto il suo modulo elastico - imbattendosi in una inspiegabile discordanza: i valori critici derivati dalla teoria, infatti, risultano da 100 a 1000 volte superiori a quelli riscontrati

---

all such criteria. ” Gli autori propongono la seguente condizione di snervamento:  $aJ_1^{12n} + bJ_2^{6n} + cJ_3^{4n} = 1$ , where  $a, b, c, n$  are arbitrary constants. The constants  $a, b, c$ , are to be determined from the following considerations: 1. There exists a uniaxial tensile yield stress  $s_0$ ; 2. There exists a pure shear yield stress  $t_0$ ; 3. There exists a hydrostatic yield pressure  $B_0$ . (...). The quantity  $n$  can be determined by another experiment. For example, by setting  $n = \frac{1}{6}$ , a uniformly convex, closed quadratic surface in the six-dimensional stress space can be obtained.”

<sup>125</sup> Tra il 1912 e il 1915 gli studi di von Laue e dei Bragg sulla diffrazione a raggi X consolidano le conoscenze sulla struttura cristallina dei metalli ed evidenziano il ruolo dei *crystal lattices* nel comportamento fisico-meccanico dei mezzi continui policristallini. Nel contempo gli studi di M. Born sull'elasticità dei cristalli permettono di verificare le relazioni stabilite dalla teoria dell'elasticità e di descrivere un modello molecolare del corpo elastico non vincolato alle “relazioni di Cauchy”.

in laboratorio. Prandtl e Dehlinger sono tra i primi a identificare alcune tipologie di imperfezioni cristalline in grado di spiegare tale discrepanza e determinati fenomeni anelastici e di cristallizzazione, nei quali lo spostamento è possibile, in generale, solo con la mediazione della cosiddetta *dislocazione cristallina*. Ma è soprattutto con gli studi di Taylor che le ricerche sulla plasticità dei cristalli acquistano un apparato teorico-sperimentale autonomo - è del 1935 la prima monografia sull'argomento di Boas e Schmid - sino a determinare “in crystal plasticity one of the most phenomenally rapid growths of activity in the history of experimental solid mechanics”<sup>126</sup>.

Le indagini a livello microscopico dimostrano che la deformazione plastica si identifica con uno scorrimento secondo la direzione delle dislocazioni - distinte in *edge* e *screw dislocations* - e che lo stato di tensione è funzione della loro disposizione. Si apre così un nuovo filone di ricerca che riscopre l'importanza degli

---

<sup>126</sup> Cfr. J.F.Bell, *H.D.P.*, **VIa/1**, p. 515. Interessanti considerazioni generali sullo stato dell'arte all'inizio degli anni '30 si possono trovare in G.I.Taylor, *The Strength of Crystals of Pure Metals and of Rock Salt*, *Proc. 4<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 113-125, 1934. Cfr., ad esempio, p.113: “In recent years considerable advance has been made on the technical and experimental side in the study of the strength of materials. Far less progress has been made in solving the fundamental problem of relating the mechanical properties of solid bodies to their crystal structure and to the reactions between the atoms which hold the structure together. The use of X-Rays has revealed the fact that practically every solid material is essentially crystalline though in the majority of cases a very large number of small crystals are aggregated together. In any fundamental study of the strength of materials we can only hope to synthesise the mechanical properties of solids when we have found out how the mechanical properties of a crystal are related to the crystal structure. In one direction considerable advances have been made. Born has shown that if certain forces exist between atoms the observed structure of certain crystals can be accounted for. The same forces which compel the atoms to pile themselves in regular arrays are also responsible for the elasticity of the structure and in this way Born has successfully accounted for the elastic properties of some crystals.”

studi di Volterra sulle distorsioni<sup>127</sup> e affronta il problema del rapporto tra micro e macromeccanica all'interno della teoria della plasticità. Ci si domanda sino a che punto la teoria della plasticità possa utilizzare gli strumenti consueti messi a disposizione dalla meccanica del continuo, sulla base di un modello valido sintantoché il carattere discreto della materia possa considerarsi ininfluenza sulle teorie formulate. Le teorie classiche si trovano in difficoltà di fronte a questo nuovo compito, difficoltà che si aggiungono alle critiche rivolte da von Mises alle letture energetiche secondo gli schemi tradizionali e alle osservazioni di Sachs<sup>128</sup> sulla validità approssimativa della *Gestalt-änderungsenergie-Bedingung*.

---

<sup>127</sup> il classico *Treatise* del Love (op. cit.) traduce ambiguamente 'distorsioni' con 'dislocations', (p. 221 ): "He describes the kind of deformations to which the theory is applicable by the name 'distorsioni'. I have ventured to call them 'dislocations'." In realtà, la teoria delle dislocazioni, sviluppatasi successivamente alla pubblicazione del *Treatise* , mantiene la necessaria distinzione fra i due concetti.

<sup>128</sup> Cfr. G.Sachs, Zur Ableitung einer Fließbedingung, *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, **72**, 1928, 734-736. Cfr. ad esempio, G.I. Taylor, The Strength of Crystals of Pure Metals and of Rock Salt, *cit.*, p.113: "Rather less success has attended various efforts to calculate the breaking stress of brittle crystals. It is a simple matter to picture the breaking of a crystal as a separation into two parts, and the attraction between them can be calculated as a function of the distance of separation by summing up the mutual potential energies of the atoms on either side of the surface of separation. In this way Zwicky, using the same law of force between the atoms which was successful in predicting its elastic properties, found that rock salt should have a breaking stress of 200 Kg. mmq. Experiments, on the other hand, show that the breaking stress of rock salt is only about 200 gm. mmq." Anche Taylor, G.I., The mechanisms of plastic deformation of crystals, *Proc. Roy. Soc. London, (A)*, **145**, 1934, 362. La discrepanza tra comportamento mono- e policristallino, rappresenta ancora oggi una delle maggiori difficoltà in cui si imbattono le ricerche sulla plasticità microstrutturale. Cfr., ad esempio, l'affermazione di E.Kröner: "In conclusion we mention that an important obstacle for dislocation motion are grain boundaries. This implies that polycrystals behave very different from monocrystals. Understanding of monocrystal plasticity does not at all mean also understanding of polycrystal plasticity." (E.Kröner, *Theory of crystal*

A questo proposito, un importante articolo di A.Smekal (1928), dedicato all'analisi delle proprietà dei materiali sulla base di considerazioni sulla loro struttura molecolare<sup>129</sup>, rappresenta il naturale complemento del lavoro di von Mises, pubblicato nello stesso anno. L'autore sottolinea l'importanza dei risultati ottenuti da Debye e Born nelle ricerche sull'elasticità di alcuni reticoli ideali, ma ricorda che essi sono in totale contrasto con le prove sperimentali condotte su cristalli reali; in particolare, riguardo le proprietà da lui definite «sensibili», cioè dipendenti in modo determinante dalla reale conformazione della struttura policristallina. Si impone, dunque, una opportuna mediazione tra le ipotesi teoriche e le caratteristiche effettive dei materiali analizzati. Le “imperfezioni della materia” evocate da Galileo quale necessario riferimento per la “sensata esperienza”, tornano ad essere motivo di riflessione ed occasione di critica nei confronti dei modelli consolidati, facilmente riconducibili a stringenti relazioni di causa ed effetto. Smekal individua nelle irregolarità di tessitura sempre presenti nei cristalli reali e quindi nei materiali normalmente analizzati la causa dei fenomeni di scorrimento ai quali può essere addebitato il cedimento plastico, così come era già stato intuito da P.Ludwik<sup>130</sup> alcuni anni prima e come era stato segnalato da Griffith a proposito delle cause di frattura<sup>131</sup>.

---

*defects and their impact on material behaviour, in Modelling of defects and fracture mechanics, Springer-Verlag, New York, 1993, p. 97). Cfr. Anche G.I. Taylor, The Distortion of Single Crystals of Metals, Proc. 2<sup>^</sup>Int. Congr. Appl. Mech. (Zürich), 1926, 46-52 e Reuss, A., Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 9, 1929, 49-58.*

<sup>129</sup> A.Smekal, Die molekulartheoretischen Grundlagen der Festigkeitseigenschaften des Werkstoffkornes, *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, **72**, 1928, 667-673.

<sup>130</sup> P.Ludwik, in *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, **69**, 1925, p.349. Cfr. anche P.Ludwik, *Elemente der technologischen Mechanik*, Berlin, 1909

<sup>131</sup> A.A., Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. (A)*, **221**, 1921, 163-198.

Nasce un nuovo fronte di ricerca all'interno degli studi sulla plasticità, rivolto all'analisi della conformazione microstrutturale e alla ricerca delle relazioni che legano le dislocazioni alle "slip lines". Nel volgere di pochi anni intorno al nuovo concetto di dislocazione cristallina si forma una serie ragguardevole di contributi teorico-sperimentali che mutano l'indirizzo degli studi sulla *resistentia solidorum*.<sup>132</sup> Anche in questo caso le sollecitazioni promosse dalla teoria della plasticità

---

<sup>132</sup> Sui rapporti tra teoria della plasticità e teoria delle dislocazioni cfr. E.Kröner, Dislocation: a new concept in the continuum theory of plasticity, *J. Math. and Phys.*, **42**, 27-37, 1963. In particolare, p. 27: "There is no doubt that the microscopic standpoint is the more fundamental one, since the macroscopically observed facts of plasticity can be considered as the superposition of numerous elementary processes on a microscopic scale. From a complete knowledge of the microscopic facts one should therefore be able in principle to derive the macroscopic behaviour of a solid by a suitable averaging procedure. It is the basic result of the microscopic theory that the elementary process of plastic deformation is the motion of a line shaped crystal defect called the dislocation [in nota si legge: "We do not consider here the second elementary process of plastic deformation, the so-called twinning, which is completely absent in many cases of practical importance."], and that the arrangement of dislocations in the body is characteristic for the internal mechanical state of the solid which has undergone some plastic deformation. In the construction of the macroscopic theory from the microscopic knowledge, one therefore has to consider the possibility of describing the internal state of the solid by giving certain average quantities which characterize the dislocation arrangement in a macroscopic way. It is one of the great hopes from the beginning of the development of the so-called continuum theory of dislocations that the macroscopic description of dislocation arrangements introduced into this theory would advance also the continuum theory of plasticity. To the solid state physics which is responsible for the microscopic theory the well-defined problem can be ceded of the experimental and theoretical determination of those functions which represent the plastic properties of the material. In this way one should arrive at a macroscopic theory which is consistent with the basic facts of the microscopic goings on."

favoriscono l'apertura di nuovi orizzonti ma nel contempo lasciano in gran parte aperte le questioni originarie<sup>133</sup>.

### 3.2 Il tentativo di “unificazione” di Kondo.

Sul problema delle dislocazioni è indispensabile ricordare le ricerche condotte da B.A.Bilby e dai suoi collaboratori in Inghilterra, da E.Kröner in Germania e da K.Kondo in Giappone. Tralasciamo i riferimenti ai primi due autori, ampiamenti considerati nella letteratura specialistica, per soffermarci brevemente su alcuni aspetti dell'opera di Kondo, attivamente impegnato a gettare “a bridge between the theory of yielding and the theory of dislocations”<sup>134</sup>.

---

<sup>133</sup> Gli studi di Seitz e Read (cfr. F.Seitz & T.A.Read, in *Journ. Appl. Phys.*, **12**, 100, 170, 470, 1941) confermano la validità della teoria delle dislocazioni quale descrizione dei fenomeni plastici, e gli studi di Koehler sul tema consentono raffronti numerici sempre più attendibili, sulla base dei risultati ottenuti da N.F.Mott, F.Nabarro, J.M. e W.G.Burgers. Sul ruolo svolto dalla teoria delle dislocazioni quale feconda occasione d'incontro tra diversi settori di ricerca, cfr. B.A.Bilby, *Geometry and continuum mechanics*, in *Proc. of IUTAM Symposium “Mechanics of generalized continua”* (1967), New York, 1968, pp. 181-197; cfr., *ivi*, p. 197: “The dislocation theory is a rich field for the interplay of different disciplines, often providing very concrete representations of abstract ideas, and emphasizing a unity of mathematical patterns of interest to us all. It is valuable both in understanding practical problems of materials and in illustrating mathematical ideas. The interaction of these different fields must surely be of profit to both of them, and it is to be hoped that there will be increasing application of these general theories in the future.”

<sup>134</sup> Cfr. K.Kondo, *On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by differential geometry of continua*, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 1964, p.221: “The gap between the microscopic and macroscopic inferences, i.e., between the ones with and without models for the anomalous elements characterizing the plastic body, could be bridged by the mathematical language mostly in terms of differential geometry.”

Con l'intento di delineare un approccio analogico alla teoria dello snervamento l'autore considera una generalizzazione tridimensionale dell'equazione di stabilità riferita ad una lastra piana<sup>135</sup>, usualmente espressa nella forma:

$$D \Delta \Delta w + P_{ji} \partial^i \partial^j w = 0$$

dove  $i, j = 1, 2$ ,  $P_{ji}$  indica le componenti del tensore di stress,  $D$  la rigidità flessionale e  $w$  la flessione della lastra. Nell'estensione analogica al fenomeno di snervamento si segue un'impostazione euristica imponendo  $i, j = 1, 2, 3$ , mentre l'operatore laplaciano  $\Delta$  e  $P_{ji}$  sono sostituiti, rispettivamente, da un operatore e da un tensore tridimensionali e una nuova costante  $B$  sostituisce la rigidità flessionale. È quindi introdotto un criterio energetico secondo il quale ogni "anomalous feature represented by a non-Euclidean object needs to absorb energy". Per piccole deviazioni dalla configurazione indeformata, di tipo euclideo, si pone:

$$H_{\mu\lambda}^{\alpha} = \partial_{\mu} \partial_{\lambda} w^{\alpha}$$

dove  $H_{\mu\lambda}^{\alpha}$  ( $\lambda, \mu = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) indica la curvatura relativa e ad essa è associata l'energia

$$u = \frac{1}{2} \partial_{\kappa} \partial_{\nu} w^{\alpha} \partial_{\mu} \partial_{\lambda} w^{\beta}$$

per unità di volume, che deve essere bilanciata con l'energia di deformazione:

---

<sup>135</sup> L'analogia con le lastre è illustrata diffusamente nell'articolo "Theory of metaphorical plates and shells", *Memoirs of the Unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry*, **1**, division C, 1955, 403-416; ivi, p. 403: "The metaphorical shells and plates which will be introduced in the following will likewise be planned so as to afford the background for recognition of certain practical physico-engineering phenomena. In particular, will provide the reader with essential insight as well as a possible means for the geometrical and physical recognition of plastic phenomena."

$$v = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \sigma^{\kappa\lambda} \partial_{\lambda} w^{\alpha} \partial_{\kappa} w^{\alpha}$$

dove  $\sigma^{\kappa\lambda}$  indica il tensore di stress.

L'energia totale non può variare nel corso della deformazione e vale quindi il criterio variazionale

$$\delta \int (u + v) dV = 0$$

Imposte le condizioni al contorno per  $w^{\alpha}$ , Kondo deduce per il materiale isotropo il seguente criterio di snervamento

$$B \Delta \Delta w^{\alpha} + \sigma^{\kappa\lambda} \partial_{\lambda} \partial_{\kappa} w^{\alpha} = 0$$

La definizione del punto di snervamento, o di altre condizioni critiche, può essere ottenuto ricercando gli autovalori di questa equazione differenziale<sup>136</sup>. La trattazione di Kondo non è del tutto chiara, ma, pur riconoscendone i limiti, egli difende il carattere pionieristico delle sue intuizioni, rivolte ad un settore della ricerca nel quale il rigore matematico deve conciliarsi con l'indeterminazione dei parametri fisici: "May I recall the heuristic steps to which I had to resort in the formative period of the initiation of the theory of yielding. I may assume that I met a number of misunderstandings in respect of the constantly self-developing theoretical construction bringing about confusions at every amendment. But I thought it more important to discover rather than to avoid pitfalls for the sake of apparent logical tactfulness."<sup>137</sup>

---

<sup>136</sup> K.Kondo, On the analytical ..., *cit.*, p. 244

<sup>137</sup> K.Kondo, A compendium of the foundation of the theory of yielding in terms of an osculation picture of finsler space, *Research Notes and Memoranda RAAG*, n. 22, 1974, p.1. Anche idem, Reconstruction of the theory of yielding with special reference to its crucial points and its relation to the theory of Cosserat continua, *Research Notes and Memoranda RAAG*, n.168, 1971, p. 60: "By these demonstrations, various hazinesses the theory of yielding has suffered from for some time been

L'aspetto più interessante del suo lavoro riguarda la continua sollecitazione a considerare con la dovuta attenzione il rapporto tra teoria delle dislocazioni e teoria dello snervamento, per trovare un indispensabile punto di riferimento nella geometria di riferimento, in seguito arricchita dalle considerazioni dei Cosserat sui corpi micropolari. Sin dal 1947 Kondo si occupa del fenomeno plastico, con l'intento di formulare un criterio analitico, che interpreti lo snervamento come un fenomeno di instabilità meccanica. Su questa linea, a partire dal 1952, viene introdotta la terminologia non-Riemanniana per descrivere le dislocazioni in termini di tensori di torsione e di curvatura, soltanto in seguito ricondotti al concetto di tensore di torsione proposto da E.Cartan nel 1922<sup>138</sup>. Queste ricerche, svolte contemporaneamente anche da Bilby e Kröner, furono accompagnate dall'intensa attività di un “unifying study group”, impegnato a studiare i problemi di base dell'ingegneria dal punto di vista delle geometrie non euclidee, per offrire un denominatore comune alle discipline fisico-meccaniche. Il gruppo si trasformò nella Research Association of Applied Geometry (RAAG, 1955), dando vita a Memoirs e Reports che costituiranno momento d'incontro obbligato per gli studiosi giapponesi e utile riferimento per quelli europei. Tale progetto anticipa di una ventina d'anni il noto convegno IUTAM sulla *Mechanics of Generalized Continua* (1967)<sup>139</sup>, non a caso dedicato a Cartan e

---

removed to vindicate the heuristic assumption suggested in the earlier investigations. It was by our being conscious of the self-evidency of the standpoint from the beginning that the direction of investigation needed not be affected. «What the author treats or what he intends to prove» would be clear now. But the time accorded to considering this manifestation on the part of the investigator himself needed to be long enough in order to be appropriate to the heuristic nature of the problem and to the isolated standpoint in which he had to work.”

<sup>138</sup> Cfr. É.Cartan in *Comptes Rendus*, **174**, 1922, 593 e 734. Nelle sue *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928) emergono elementi d'analisi che richiamano direttamente le questioni topologiche affrontate dalla teoria delle dislocazioni: “En somme jusqu'à present l'espace de Riemann est pour nous une collection de petits morceaux d'espace euclidien, mais il reste jusqu'à un certain point amorphe”.

<sup>139</sup> *Proc. IUTAM-Symp. on The Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications* (1967), Berlin, 1968.

Cosserat, nel quale verrà ribadita la necessità di costruire momenti d'incontro tra macro e micromeccanica per evitare pericolose divaricazioni d'intenti.

### 3.3. Prager e la "new theory of plasticity".

La teoria delle dislocazioni non si sovrappone alla teoria classica della plasticità ma provoca al suo interno un radicale rinnovamento, che pone al centro dell'attenzione i problemi sollevati dalla *doctrine de la continuit *.

Tra il 1938 e il 1942 W.Prager<sup>140</sup> elabora una nuova teoria della plasticit  basata sull'idea di "continuous transition from elastic to plastic state", alla quale si accompagnano alcune interessanti notazioni sull'analogia tra le equazioni dell'elasticit  e dell'idrodinamica, riconducibili alle considerazioni della 'scuola inglese', salvo la nuova consapevolezza sul carattere formale, e non sostanziale, di tale relazione<sup>141</sup>.

---

<sup>140</sup> Prager, W., On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state, *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 1938, 234-237; anche, A new mathematical theory of plasticity, *Revue de la Facult  des sciences de l'Universit  d'Istanbul*, série A, **5**, 1941, 215-226; idem, Die Fliegrenze bei behinderter Form nderung, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, **4**, 1933, p.95; idem, Fundamental theorems of a new mathematical theory of plasticity, *Duke Math. Jour.*, **9**, 1942. I lavori di Prager sono preceduti da analoghi saggi di Fromm sulle leggi che regolano il comportamento plastico-viscoso dei continui isotropi. Cfr. H.Fromm, Stoffgesetze des isotropen Kontinuums, insbesondere bei z h-plastischem Verhalten, *Ingenieur-Archiv*, **4**, 1933, 432-466; idem, Zur Theorie der z h-plastischen Stoffe, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **13**, 1933, 427-430; idem, Stoffgesetze des z h-plastischen, isotropen Kontinuums, *Proc. IV Int. Congr. Appl. Mech.*, 1934, 182-184. Con particolare riferimento alla memoria pubblicata sull'*Ingenieur-Archiv*, Truesdell rileva che "the considerations in Fromm's paper are not clear". Cfr. C.Truesdell, Hypo-Elastic Shear, *J. Appl. Phys.*, **27**, 1956, 442.

<sup>141</sup> Cfr. W.Prager, On an analogy between the fundamental equations of hydrodynamics and elastostatics, *Revue Fac. Sci. Istanbul*, (A), **5**, 1941, 41-43.

Prager osserva che la teoria di Prandtl-Reuss per i materiali plastici prevede un passaggio improvviso dallo stato elastico a quello plastico, nell'ipotesi che le deformazioni plastiche si verifichino soltanto dopo aver superato un certo limite dello stato di tensione, mentre in realtà la maggior parte dei materiali mostra una transizione graduale tra i due stati. La teoria classica, quindi, è in grado di fornire risultati attendibili soltanto nei casi in cui la deformazione plastica supera abbondantemente quella elastica, e da essa sono esclusi i casi di instabilità oltre il limite elastico, nei quali le deformazioni plastiche risultano molto ridotte.

Per un materiale che mostra una transizione elasto-plastica graduale, senza incrudimento, valgono le relazioni elementari:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{cases} E & \text{se } \sigma d\varepsilon < 0 \\ E \left[ 1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{2n} \right] & \text{se } \sigma d\varepsilon > 0 \end{cases}$$

dove all'aumentare del parametro  $n$  il diagramma  $(\sigma, \varepsilon)$  tende ad approssimare il grafico corrispondente al comportamento elastico-perfettamente plastico (bilatera di von Mises)<sup>142</sup>. Per confrontare meglio la nuova teoria con quella precedente, Prager riscrive le relazioni di Prandtl-Reuss nella forma:

---

<sup>142</sup> Cfr. le osservazioni svolte nel cap. II.

$$ds_{ik} = \begin{cases} 2G de_{ik} & \text{se } A < \rho^2 \text{ oppure } A = \rho^2 \text{ ma } B < 0 \\ 2G de_{ik} - \frac{B}{\rho^2} s_{ik} & \text{se } A = \rho^2 \text{ e } B > 0 \end{cases}$$

dove  $s_{ik}$  indica il tensore deviatorico,  $de_{ik}$  l'incremento di deformazione,  $\rho$  la tensione di snervamento dovuta al taglio, e infine  $A$  e  $B$  gli invarianti così definiti:

$$A = \text{Error!Spq}^2 \quad B = G \text{ Error!Spq} de_{pq}$$

Una lieve modifica di queste relazioni conduce alle nuove espressioni valide per materiali che presentano una transizione continua dallo stato elastico a quello plastico:

$$ds_{ik} = \begin{cases} 2G de_{ik} & \text{se } B < 0 \\ 2G de_{ik} - \frac{1}{\rho^{2n}} A^{n-1} B s_{ik} & \text{se } B > 0 \end{cases}$$

Queste relazioni possono assumere una veste semplificata, valida per stime qualitative, ponendo  $n=1$ <sup>143</sup>:

$$ds_{ik} = \begin{cases} 2G de_{ik} & \text{se } B < 0 \\ 2G de_{ik} - \frac{1}{\rho^2} B s_{ik} & \text{se } B > 0 \end{cases}$$

---

<sup>143</sup> In questo caso, ammette Prager, "these relations are almost identical with those of the Prandtl-Reuss theory, a slight difference existing only in regard to the conditions used to discriminate the various cases." Cfr. *op. cit.*, p. 236.

ovvero complicarsi ulteriormente nel caso in cui si tenga conto dell'incrudimento<sup>144</sup>. La trattazione di Prager sembra estranea al nostro tema, ma in realtà coglie gli spunti di maggior interesse delle nuove istanze che affioreranno nel decennio successivo. Tre anni più tardi è ancora Prager ad insistere sulla necessità di riformulare la teoria della plasticità su nuove basi, proponendo ulteriori contributi sull'argomento. A margine di questi, ma in modo non casuale come avremo modo di osservare, l'autore pubblica una breve nota sull'analogia tra le equazioni dell'idrodinamica e dell'elastostatica, allo scopo di richiamare l'attenzione sulla stretta analogia tra le equazioni fondamentali del "plane irrotational flow" di un fluido ideale e quelle di equilibrio di un corpo elastico sottoposto ad uno stato di tensione piano. "Though purely formal this analogy, to the author's knowledge hitherto unnoticed, seems to merit interest"<sup>145</sup>, scrive Prager, senza accorgersi di ristabilire in questo modo un'originaria e naturale affinità tra le due discipline, sulla quale aveva insistito la *doctrine de la continuité*.

#### 3.4. La critica di Truesdell.

Dopo quasi un secolo si ripresenta il tema della continuità tra stato solido e fluido, al quale sarà dedicata la tesi di dottorato di W.Noll, che giunge alla definizione di un'equazione costitutiva, relativa ai materiali *igrosterici*<sup>146</sup>, in grado di descrivere fenomeni viscoelastici. Noll ricorda che la classe descritta da questi materiali include sia solidi che fluidi e che "the idea that solid and fluid are only limit

---

<sup>144</sup> Cfr. formule (7) e (8) dell'articolo citato.

<sup>145</sup> W.Prager, On an analogy between the fundamental equations of hydrodynamics and elastostatics, *cit.*, p. 41.

<sup>146</sup> W.Noll, On the continuity of the solid and fluid states, *Jour. Rat. Mech. Anal.*, **1**, 1955, 3-81. Scrive Noll (p.26): "The idea that solid and fluids are only limit cases of a general type of material is due to Maxwell"; in nota è spiegata la scelta del termine *hygrosteric*: "From ὑγρός, «fluid», and στερεός, «solid»".

cases of a general type of material is due to Maxwell”<sup>147</sup>. In realtà, come abbiamo cercato di mostrare in queste pagine, i riferimenti storiografici sono molto più numerosi e consistenti. Sarebbe ingenuo operare azzardati accostamenti in base a semplici assonanze, ma non vi è dubbio che una stessa vena carsica alimenta sia i primi incerti studi sulla plasticità, sia la raffinata ricerca contemporanea che porterà alla fondazione assiomatica della meccanica del continuo. Non è un caso che Noll abbia avuto come illustre mentore C.Truesdell<sup>148</sup>, impegnato negli stessi anni in un grandioso progetto di rigorizzazione della *rational mechanics of materials* che portava con sé una critica radicale all'idea stessa di *criterio di plasticità* e la descrizione di un nuovo legame costitutivo definito *ipoelastico*.

---

<sup>147</sup> W. Noll, On the Continuity of the Solid and Fluid State, *JRMA*, **4**, 3-81, 1955; di Maxwell è citata la memoria “On the dynamical theory of gases”, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, **A 157**, 1867, 49-88. C.Truesdell, *Rational mechanics of materials*, in *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*, New York, 1966, p. 14: “In the last few weeks Mr. Wang in his dissertation, just accepted by this university, has distinguished and interpreted a class which defines simple materials whose simmetries are suggested by those of various kinds of liquid crystals. Theories to represent these physical materials had been proposed earlier, within a different framework, by Mr. Ericksen. Wang's work shows that Noll's theory of simple materials is broad enough to include response midway, in various senses, between the common ideas of «fluid» and «solid». Wang's subfluids, as he calls them, retain their properties under dilatations along a preferred triad of axes, but, in general, under no other changes of shape. Subfluids can support in equilibrium certain kinds of shear stress, but will flow if sheared in other directions.”

<sup>148</sup> Truesdell così commenta il contributo di Noll su questo tema (*Essays...*, 1968, 358-359): “Noll's formulation is in terms of a principle he calls *the isotropy of space*, by which the basic equations of any proposed ideal material can be tested for invariance (...). By the use of his principle, Noll was able to construct the first adequate theory of the continuity of the solid and fluid states. In this unified theory appear materials which show the responses both of solids and of fluids, the non-linear theories of pure elasticity and pure fluidity being included as extreme possibilities [rinvio a Maxwell, 1867. Cfr. nota precedente]. (...). A possibly theory of continuous transition from ordinary behaviour to ultimate failure or breakage has thus been initiated.”

Secondo Truesdell la nozione di criterio di plasticità è segno emblematico del carattere semi-empirico del suo apparato teoretico ed è quindi da esso che occorre ripartire per una seria riformulazione del problema “on the basis of a uniform, smooth mechanical theory, meaningful alike for small strain and large”<sup>149</sup>. Le provocatorie osservazioni dell'insigne studioso sembrano non lasciare spazio alle obiezioni: dopo quasi un secolo di studî teorico-sperimentali, contrassegnati da una grande abbondanza di investimenti nella ricerca, la teoria della plasticità non può vantare né la rigorosità né la completezza raggiunte dalla teoria elastica<sup>150</sup>, e di fronte alle esigenze della rinnovata meccanica razionale dei materiali, essa appare incapace di emendarsi *ab omni naevo*; per cambiare questo stato di cose il *plastic yield* dovrebbe rinunciare ai suoi caratteri aprioristici per diventare frutto di un teorema nell'ambito di una teoria fondata sulla velocità di deformazione e sull'idea di una transizione graduale dal regime elastico a quello plastico. L'ipoelasticità<sup>151</sup> risponde ai requisiti

---

<sup>149</sup> C.Truesdell, Hypo-elastic shear, *Jour. Appl. Phys.*, **27**, p. 447, 1956.

<sup>150</sup> Cfr. Truesdell, *Sketch...*, *cit.*, 1980, p. 15: “I think we had best drop the ramifications and unite in admiration of Boltzmann for his having been the first to idealize not only the long-range memory of materials but also their slowly fading memory. The physical phenomena he had in mind, like those represented in other theories of the nineteenth century, had belonged to common experience for millenia. No new quality was being discovered; what was long familiar had to be quantified in order to serve as a basis for specific prediction. The same may be said of theories of plasticity. Growing out of Cauchy's idea of bodies deprived of elasticity, these were formulated by Saint-Venant and Lévy in 1870. Typically they represent the material as incompressible and impose upon the stresses a scalar limitation. A body of such material is assumed to remain underformed until the stresses within it rise to magnitudes great enough to satisfy this imposed «yield condition», after which the material will flow in accord with a constitutive equation. Thus a constitutive inequality joins a constitutive equation to provide the constitutive relations of the theory.”

<sup>151</sup> Sui distinguo di Truesdell cfr. C.Truesdell, Hypoelasticity, *JRMA*, **4**, 1955, p. 85 “A hypo-elastic body is a material which may soften or harden in strain but in general has neither preferred state nor preferred stress; in its response to deformation it is, analytically speaking, entirely

richiesti e sulla base dell'analisi incrementale delle tensioni permette di studiare il comportamento di un corpo elasto-plastico a partire dallo stato infinitamente prossimo, senza riferimento ad alcuna configurazione privilegiata. Posto il tensore a dimensioni nulle

$$s^{km} = \frac{t^{km}}{2\mu}$$

dove  $t^{km}$  è il *tensore degli sforzi*, e il *tensore della velocità di deformazione*

---

smooth. (...). The definition of the hypo-elastic bodies differs from most employed in plasticity theory in that it is dynamically sound.(...). It is least possible to ask how a hypo-elastic body behaves under large strains, large rotations, or quick stress changes, with some chance of getting an answer which is a theorem rather than an opinion. In this same spirit will we pursue its theory, seeking only exact solutions. Alle pp. 87-88: "The equations of the theory of hypo-elasticity reduce to those of the classical linear theory of elasticity under the assumptions usual in formulating that theory. (...). There is no obvious connection between the classical theory of finite strain and the theory of hypo-elasticity. Indeed, it was originally my intention to find a new concept of elastic behavior, mutually exclusive with the theory of finite strain except in the linearized case. However, Dr. Walter Noll has announced a proof that *every isotropic elastic body is also an isotropic hypo-elastic body*. Thus hypo-elasticity is a generalization of the classical theory of finite strain. (...). It now seems to me that the theory of the hypo-elastic body of grade zero, with the initial terms in the equations of motion neglected, is what Cauchy intended by his much understood theory of initial stress (Cauchy, 1829)." Infine alle pp. 132-133, nei "Concluding remarks": "A remarkable product of our study has been the discovery of phenomena indicative of yield or rupture. I say "discovery", since our theory is put intentionally in terms of analytic differential equations: its postulates are entirely free from statements regarding yield or rupture or any sort of discontinuity, so that such phenomena, if they are to appear at all, must be predicted in the course of solution of particular problems (...). It is not the least in importance to recall that our theory really embodies no new ideas of mechanical behavior beyond those of classical linear elasticity. Rather, it simply extends the classical view of elastic response by formulating it in terms of rates. That these ideas in some cases predict yield without assuming a yield condition indicates their strength and potential relevance."

$$\mathbf{d}_{km} = \frac{1}{2} (v_{k,m} + v_{m,k})$$

dove  $v_k$  è la velocità, il legame ipoelastico è espresso dall'equazione

$$\frac{\delta s^{km}}{\delta t} = f^{km} (d_{np}, s_{qr})$$

ovvero

$$\frac{\delta s^{km}}{\delta t} = A^{kmnp} d_{np}$$

Per soddisfare al principio di indifferenza del riferimento materiale si deve porre<sup>152</sup>:

$$\frac{\delta s^{km}}{\delta t} = \frac{\partial s^{km}}{\partial t} + s^{km}_{,p} v^p - w^k_p s^{pm} - w^m_p s^{kp} = A^{kmnp} d_{np}$$

e le equazioni generali dell'ipoelasticità risultano:

$$2\mu s^{km}_{,m} + \rho f^k = \rho \dot{v}^k$$

$$\frac{\delta s^{km}}{\delta t} = \frac{\partial s^{km}}{\partial t} + s^{km}_{,p} v^p - w^k_p s^{pm} - w^m_p s^{kp} = A^{kmpq} d_{pq}$$

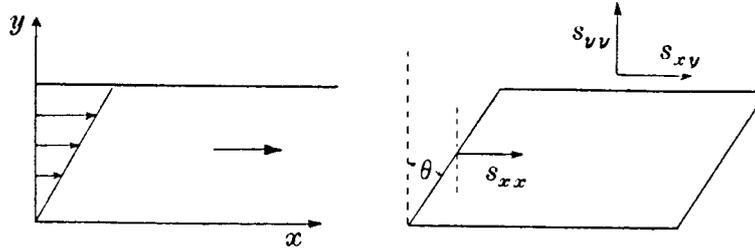
dove  $A^{kmpq}$  è, in generale, funzione del tensore delle tensioni.

Anche nel caso di corpi isotropi, ossia per un tensore  $A^{kmpq}$  isotropo, le equazioni costitutive risultano molto complicate, ma nel caso di scorrimento semplice si ottengono delle semplici formule che si possono confrontare direttamente con gli

---

<sup>152</sup> Truesdell sottolinea che le condizioni generali di invarianza impediscono di considerare la sola derivata *sostanziale*  $\frac{\partial s^{km}}{\partial t} + s^{km}_{,p} v^p$  definita *intrinsic derivative* da J.G.Oldroyd (cfr. J.G.Oldroyd, Non-Newtonian effects in steady motion idealized elastico-viscous liquids, *Proc. Royal Soc. London*, **245 A**, 1958, 278-297).

usuali criteri di plasticità. Lo scorrimento è definito dalle equazioni (con riferimento alle figure seguenti):



$$v_x = 2ky \quad (k = \text{cost.})$$

$$v_y = 0$$

$$v_z = 0$$

Posto  $\tau = 2kt = \text{tg}\theta$ , e

$$\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \frac{3}{2} \alpha_1 \alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_3 \alpha_4 + \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_4 + \frac{1}{4} \alpha_4^2$$

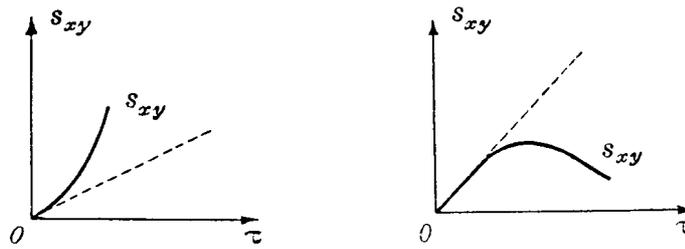
si ricava per lo sforzo di taglio l'espressione

$$s_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s}} \text{sen } h\sqrt{\alpha_s} t & \text{se } \alpha_s \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-\alpha_s}} \text{sen } h\sqrt{-\alpha_s} t & \text{se } \alpha_s \leq 0 \end{cases}$$

Per piccoli spostamenti e per  $\alpha_s = 0$  vale la nota relazione:

$$s_{xy} \approx \frac{1}{2} \tau$$

Se invece  $\alpha_s > 0$  il corpo aumenta la sua rigidezza a causa dello scorrimento (“these materials *stiffen* in shear”), mentre per  $\alpha_s < 0$  si ottiene il comportamento di un corpo *molle* (materiali che “*soften* in shear”).

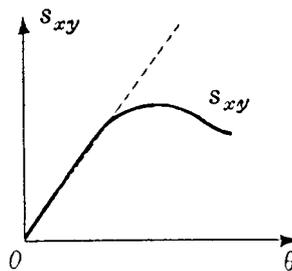


In particolare, per

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{-\alpha_s}} \pi$$

la curva  $s_{xy}$  presenta un massimo. Quindi l'ipoeleasticità indica un *massimo* per il carico critico. In questo caso, tuttavia, il plastic yield non è postulato ma dedotto dalla teoria per via matematica.

Un'altra rappresentazione si può ottenere considerando le coordinate  $s_{xy}$ ,  $\theta$ :



Se si considera che  $A^{kmpq}$  sia una funzione quadratica, sempre nel caso dello scorrimento semplice si ottiene ( $K$  è una costante senza dimensioni):

$$\frac{\partial s_{xx}}{\partial \tau} = s_{xy} \left( 1 - \frac{s_{xx}}{K^2} \right)$$

$$\frac{\partial s_{yy}}{\partial \tau} = -s_{xy} \left( 1 + \frac{s_{yy}}{K^2} \right)$$

$$\frac{\partial s_{xy}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left( s_{yy} - s_{xx} + 1 - \frac{2s_{xy}^2}{K^2} \right)$$

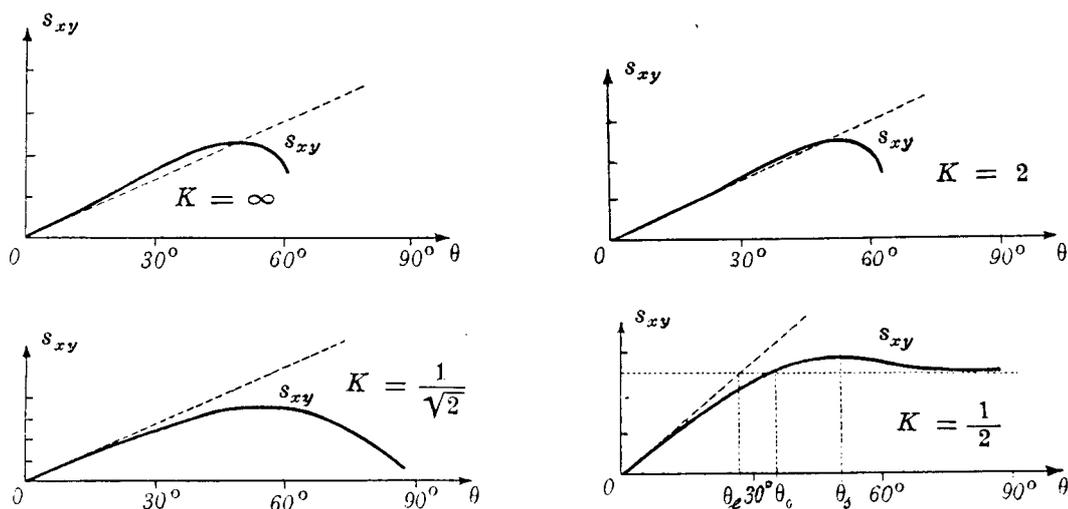
Posto  $S =$  ottiene:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = s_{xy} \left( 1 - \frac{S}{K^2} \right)$$

dove  $\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0$  per  $S = K^2$ , in accordo con la condizione di snervamento di von Mises.

Nel caso in cui  $K = \infty$ , si ricava l'equazione del corpo *molle* con  $\alpha_s = -1$ . Se  $K$  tende a zero, cioè il von Mises yield si verifica per un piccolo valore degli sforzi, si dimostra che i due tipi di cedimento coincidono, “con la sola ed importantissima eccezione che questi due cedimenti avvengono in corrispondenza di un valore dello scorrimento *ben definito e previsto dalla teoria.*”<sup>153</sup>.

Considerando il corpo *molle* descritto in precedenza è possibile descrivere il legame tra lo sforzo di taglio  $s_{xy}$  e l'angolo  $\theta$ , al variare di  $K$ :



L'ipelasticità è in grado di descrivere due tipi di cedimento plastico: il primo, *plastic yield*, corrispondente ad uno scorrimento finito, e il secondo, *von Mises yield*, relativo ad un fenomeno asintotico in corrispondenza di uno scorrimento infinito. Entrambi sono “previsti” dalla teoria - a dimostrazione dell'inutilità dei “criteri” postulati dalla teoria classica - e derivano da considerazioni sulle condizioni di invarianza delle equazioni costitutive. Green e Thomas, inoltre, hanno verificato che la maggior parte delle teorie sulla plasticità sono casi particolari

<sup>153</sup> C.Truesdell, *Ipoelasticità*, Bari, 1957, p. 15.

dell'ipoelasticità<sup>154</sup>, mentre Noll ha dimostrato che ogni corpo elastico isotropo rientra nella definizione di corpo ipoelastico; quindi “hypoelasticity seems to include and unify all the simpler ideas of purely elastic behavior”<sup>155</sup>.

Il richiamo alla meccanica non lineare delle grandi deformazioni rende difficile la traduzione applicativa della teoria ipoelastica nell'ambito dei problemi affrontati dal calcolo plastico, ma le osservazioni di Truesdell costituiscono un'utile guida per orientarsi nel panorama delle ricerche successive. A partire dalla fine degli anni '50, infatti, si riscontra un crescente interesse per le questioni che avevano stimolato la critica truesdelliana. Tra i numerosi aggiornamenti della teoria dell'ipoelasticità ricordiamo il contributo di T.Tokuoka, che propone una riformulazione dei criteri di snervamento in forma intrinseca “to deal with plasticity within the scope of hypoelasticity”. (T.Tokuoka, *Fundamental relations of plasticity derived from hypo-elasticity*, *Proc. Int. Symp. on Foundations of Plasticity* (Warsaw, August 30-September 2, 1972), **1**, 1-8, Noordhoff Int. Pub., Leyden 1973). Partendo dall'equazione costitutiva dell'ipoelasticità:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) [\mathbf{D}]$$

dove  $\dot{\mathbf{A}} = \partial_t \mathbf{A} - \mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{W}$  con  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{W}$ , rispettivamente, *stretching* e *spin tensors*, Tokuoka dà al criterio di snervamento il significato di una relazione su  $\mathbf{A}$ , per la quale l'operatore lineare  $\mathbf{H}(\mathbf{A})$  sia singolare; inoltre, la deformazione plastica è interpretata come nucleo di  $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ . La decomposizione del dominio  $v$  di  $\mathbf{H}(\mathbf{A})$  nella

<sup>154</sup> Cfr. C.Truesdell, in *Appl. Math. Rev.*, **12**, 1959, p. 78.

<sup>155</sup> C.Truesdell, *The Rational Mechanics of Materials. Past, Present, Future*, *Appl. Math. Rev.*, **12**, 1959, p. 78. Tra i numerosi contributi successivi sui temi evidenziati da Truesdell cfr., ad esempio, T.Y. Thomas, *Interdependence of the yield condition and the stress-strain relations for plastic flow*, *Proc. Acad. Sci. U.S.A.*, **40**, 593-597, 1954, K.C.Valanis, *A theory of viscoplasticity without a yield surface*, *Archives of Mechanics*, **23**: part I, 517-533; part II, 535-551, 1971. A.J.A. Morgan (Some properties of media defined by constitutive equations in implicit form, *Int. J. Engng. Sci.*, **4**, 155-178, 1968) ha criticato il carattere a prioristico dei criteri di snervamento proposti in precedenza, dimostrando che alcuni aspetti di tale fenomeno possono essere dedotti dalle proprietà matematiche di equazioni costitutive scritte in forma implicita.

somma diretta  $v = v_N(\mathbf{A}) \oplus v_S(\mathbf{A})$ , dove  $v_N(\mathbf{A})$  è l'insieme degli elementi aventi gli stessi autovettori di  $\mathbf{A}$ , e  $v_S(\mathbf{A})$  è l'insieme degli elementi che sono ortogonali a  $v_k \otimes v_k$  per ogni autovettore  $v_k$  di  $\mathbf{A}$ , permette all'autore di definire due diversi criteri di snervamento che, nel caso isotropo, corrispondono al criterio di von Mises e a quello di Tresca. Questo nuovo approccio, che aggiorna l'intervento di Truesdell sul tema, fa intravedere possibili sviluppi di ricerca che fanno propri le esigenze della teoria della plasticità e le istanze della teoria ipoelastica.

Questo ultimo contributo rappresenta lo sviluppo di una linea di ricerca che ci sembra attraversare l'intera storia sin qui narrata, nel tentativo di offrire una fondazione razionale del criterio di snervamento, non tanto utilizzando congetture di ordine fisico, bensì giungendo ad una sorta di “univocazione” tra tale problema e altri di analisi del continuo concernenti condizioni di singolarità. Sotto questo profilo, già Beltrami aveva collegato, tramite un teorema di Lipschitz, il limite imposto al cimento del materiale alla positività della funzione quadratica che esprime l'energia potenziale elastica (la qual cosa implica a sua volta la stabilità di un moto vibratorio libero), mentre Brillouin aveva cercato di ricondurre la condizione di plasticità alla eventuale indeterminazione dello stato di spostamento per una assegnata configurazione dello stato di sollecitazione.

Questa linea fondazionale riaffiora, dopo una lunga fase di sosta, col dibattito appena descritto. Le considerazioni di Kondo e, soprattutto, quelle di Truesdell sull'ipoelasticità, si collegano a questa linea di ricerca, come risulta evidente considerando l'impostazione innovativa che egli dà al problema dell'instabilità elastica<sup>156</sup> in termini di sollecitazioni infinitesime sovrapposte a finite, dove il contesto concettuale appare analogo a quello descritto nella memoria del 1957, trattandosi di una soluzione incrementale ottenuta a partire da una impostazione alle deformazioni finite.

Traendo partito da queste linee convergenti, potrebbe forse essere prospettato un campo di ricerca del quale in questa sede ci limitiamo a delineare le premesse,

---

<sup>156</sup> cfr. C.Truesdell e W.Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, in *Handbuch der Physik*, **III/3**, 1965.

ritenendo incongruo con l'impostazione storica sin qui seguita, una più diffusa esplicitazione degli sviluppi formali.

Il concetto che ci sembra meritevole di attenzione è quello precedentemente prefigurato dagli autori citati, della possibile “univocazione” tra il tema della condizione di snervamento e quello della definizione, matematicamente fondata, di condizioni generali di stabilità infinitesima; soprattutto nella sua versione *locale* resa esplicita dalla condizione di Hadamard:

$$A^{\circ}_{ihjk} \lambda_i \lambda_j \mu_h \mu_k \geq 0 \quad \text{per qualsiasi } \lambda, \mu \quad A^{\circ}_{ihjk} = E^{\circ}_{ihjk} + s^{\circ}_{ij} \delta_{hk}$$

dove  $E^{\circ}_{ihjk}$  sono coefficienti corrispondenti alla configurazione deformata fondamentale e  $s^{\circ}_{ij}$  i corrispondenti valori dello stress. Va, tuttavia, osservato che la condizione di Hadamard non promette una facile esplicitazione di condizioni limite sullo stress, anche se esse possono essere certamente individuate rispetto a specifici casi di studio.

Una via probabilmente più semplice sul piano formale, può invece essere ottenuta considerando quella formulazione duale del problema della stabilità infinitesima che trova interessanti indicazioni in un lavoro di Maier (G.Maier, Sul metodo dei lavori virtuali nei problemi di instabilità euleriana, *Rend. Ist. Lomb. Sci. e Lett.*, **96**, 1962, 438-477), in quello di Benvenuto e Corsanego (E.Benvenuto, A.Corsanego, Formulazione duale di un criterio di stabilità dell'equilibrio, *Atti Ist. Sci. Costruz. Univ. Genova*, **3**, 1969, 19-26) e in altri affini.

Tale formulazione duale si riferisce alla classe delle configurazioni staticamente ammissibili infinitamente prossime alla configurazione fondamentale di equilibrio e conduce alla discussione della negatività del funzionale, valutato nella classe degli spostamenti infinitesimi  $\Delta u_{ij}$ :

$$(1) \quad \int ( \Delta \epsilon_{ij} - \Delta u_{i,j} - u^{\circ}_{ijh,j} \Delta u_{h,i} ) \Delta s_{ij} < 0$$

che soddisfa le equazioni generali di Trefftz:

$$(\Delta s_{ih} + s^{\circ}_{ij} \Delta u_{h,j})_{,i} = 0$$

Si può a questo punto ricordare che l'integrale generale di tali equazioni è offerto da:

$$\Delta s_{ij} = c_{ihpq,pq} + ( s^{\circ}_{hi} \Delta u_p - s^{\circ}_{hp} \Delta u_i - s^{\circ}_{ip} \Delta u_h )_{,p}$$

dove  $c_{ihpq}$  corrisponde al noto integrale generale delle equazioni di equilibrio di Cauchy, determinato da Gwyther e Finzi<sup>157</sup> in termini di funzioni potenziali.

Prescindendo, come è lecito, dal contributo di  $c_{ihpq}$ <sup>158</sup>, dalla (1) si deduce la negatività del funzionale:

$$\int [C_{ihjk} S_{kjsp} S_{hirq} + s_{pq}^{\circ} \delta_{rs}] \Delta_{us,p} \Delta_{u,r,q} dV < 0$$

dove si è posto  $\Delta \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} (s_{ij}^{\circ}) \Delta s_{km}$  e  $S_{kjsp} = s_{kj}^{\circ} \delta_{sp} - s_{kp}^{\circ} \delta_{sj} - s_{jp}^{\circ} \delta_{sk}$

dalla quale, riproducendo la nota dimostrazione di Cattaneo (o di Noll)<sup>159</sup>, si può trarre la condizione locale necessaria:

$$A_{sprq}^* \lambda_s \lambda_r \mu_p \mu_q \geq 0 \quad \text{per qualsiasi } \lambda, \mu \quad \text{dove } A_{sprq}^* = - [C_{ihjk} S_{kjsp} S_{hirq} + s_{qp}^{\circ} \delta_{rs}]$$

Pare evidente dalla struttura dei coefficienti della forma  $A_{sprq}^* \lambda_s \lambda_r \mu_p \mu_q$  che la determinazione dello stato fondamentale di tensione è vincolata al rispetto di esplicite disuguaglianze limitative già in campo elastico e, ovviamente, nel caso ipoelastico<sup>160</sup>.

<sup>157</sup> Cfr. C.Truesdell e R.Toupin, *The Classical Field Theories*, in *Handbuch der Physik*, **III/1**, 1960, p. 586.

<sup>158</sup> Cfr. E.Benvenuto, *Condizioni locali di stabilità*, *Atti dell'Istituto di Scienze delle Costruz.*, Univ. Genova, **3**, 1969, 53-65.

<sup>159</sup> C.Cattaneo, *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità*, *Rend. Acc. Sci. Lincei*, (8), **1**, 1946, 66-72; 728-734; per la dimostrazione di W.Noll cfr. C.Truesdell e W.Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, in *Handbuch der Physik*, **III/3**, 1965, 253-254.

<sup>160</sup> Al fine di mostrare l'immediatezza di tale formalismo, seppur in un caso scarsamente significativo sul piano fisico, si può osservare come l'attribuzione del seguente stato di spostamento in un riferimento piano dove  $\theta$  è un parametro infinitesimo:

$$\Delta u_1 = \theta x_2 \quad \Delta u_2 = 0 \quad \Delta u_{1,1} = 0 \quad \Delta u_{1,2} = \theta \quad \Delta u_{2,1} = 0 \quad \Delta u_{2,2} = 0$$

condurrebbe per semplici passaggi alla delimitazione:

$$s_{22}^{\circ 2} (1 + \nu) + 4 E s_{22}^{\circ} + s_{12}^{\circ 2} < 0$$

### 3.5. “Rheologists and dislocationists”.

L'obiezione spontanea riguarda l'applicabilità della nuova proposta, e su questo punto Truesdell non ha esitazione nell'affermare che “per quanto un tale modo di affrontare la questione non sia oggi di moda, devo rispondere francamente che se lo studio delle varie sostanze e l'analisi dei risultati sperimentali avessero potuto risolvere il problema centrale del comportamento plastico, sono sicuro che i numerosi e costosi lavori degli ultimi cento anni l'avrebbero risolto. Preferisco studiare una teoria da un punto di vista differente e con tutto il rigore deduttivo. In seguito, se la teoria si dimostrerà chiara, coerente e suggestiva, si potranno fare i confronti sperimentali e applicare i procedimenti di approssimazione.”<sup>161</sup>

---

dalla quale risulta la condizione che la coppia delle tensioni ( $s_{22}^0$ , ) debba rimanere interna all'ellisse di centro  $(-\frac{2E}{1+\nu}, 0)$  e semiassi  $\frac{2E}{1+\nu}$ ,  $\frac{2E}{\sqrt{1+\nu}}$ .

Ovviamente questa condizione deve intendersi nello spirito della stessa condizione di Hadamard, quale semplice condizione necessaria, e la grossolanità dell'esempio studiato porta a delimitazioni poco significative. Ci sembra, tuttavia, interessante notare come il metodo proposto si presti ad una indagine più approfondita circa le ipotesi di “univocazioni” del tema dei criteri di plasticità e delle generali condizioni di stabilità infinitesima, prospettata da diversi autori considerati nel presente lavoro.

<sup>161</sup> C.Truesdell, *L'ipoelasticità*, cit., p. 5. Il rinvio ad un testo italiano non deve meravigliare; si tratta di una conferenza tenuta presso il Seminario Matematico dell'Università di Bari, nella quale l'autore rivela, più che in ogni altro scritto dedicato all'argomento, le ragioni della sua presa di posizione nei confronti della teoria classica della plasticità. Non è un caso che Truesdell abbia voluto presentare con tanta dovizia di particolari la sua teoria ai colleghi italiani; dopo aver ricordato i lavori di Signorini confessa: “Mi parve - e sono sicuro che qui in Italia non troverò tante voci dissenzienti quante ve ne sono state altrove - che per ogni questione fondamentale la considerazione delle deformazioni finite fosse essenziale.” Una posizione ancora più netta, a tratti sarcastica, è espressa l'anno precedente nella conferenza *Recent advances in rational mechanics* (1956), pubblicata in *Essays* (cit., pp.334-366, in particolare p. 357), al paragrafo “Experiment and Theory”: “We have had more than a century of experimentation, often on a large scale and at great cost,

Molteplici ragioni sollecitano affermazioni tanto perentorie. Innanzitutto l'urgenza di fondare saldamente la meccanica dei materiali sulla nozione di equazione costitutiva, rispondente a tutti i criteri di invarianza che possono assicurarne la generalità. L'ipoelasticità trae origine da queste considerazioni. Essa prende spunto, infatti, da una critica di Ericksen sulle proprietà di invarianza di una nuova relazione di legame proposta da Truesdell con l'intento di descrivere un funzionale che non dipendesse dallo stato iniziale del materiale, così come accadeva nella teoria classica, ma soltanto da quello immediatamente precedente alla configurazione attuale. Il carattere dinamico della teoria impone che la risposta del materiale risulti indipendente dall'osservatore e sollecita un approfondimento dei fondamentali lavori di Cauchy<sup>162</sup>, Jaumann e Zaremba sull'argomento, che conduce al concetto di *material frame-indifference*<sup>163</sup>. Con questo principio guida, a parere di Truesdell è

---

regarding the mechanical behavior of materials. Had experiment settled these matters, I should not be talking about them here. Experimental mechanics is a recognized field which needs no defense; it has its own problems, its own methods, its own results, its successes and its failures. It may, but need not, co-operate with applied mechanics and with rational mechanics; these, in their turn, may, but need not, co-operate with it. Without *experience*, there would be no rational mechanics, but I should mislead you if I claimed that experiment, either now or 200 years ago, had greatly influenced those who study rational mechanics. In this connection experiment, like alcohol, is a stimulant to be taken with caution; To consult the oracle of a fine vintage at decent intervals exhilarates, but excess of the common stock brings stupor." Come risulterà chiaro nel seguito, tutti gli elementi utilizzati da Truesdell per criticare la teoria della plasticità tradizionale sono diventati elementi portanti della nuova teoria dei materiali ipoelastici.

<sup>162</sup> In *Handbuch der Physik*, III/3, p. 401, nota 1, dopo aver confessato il debito verso Cauchy: "But there is no reference to *time rates* in his work, which seems to be directed toward infinitesimal static deformation.". Cfr. A.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement des corps considérés comme des masses continues*, *Ex. de Math.*, 4, 1829, 293-319.

<sup>163</sup> Sul problema dell'invarianza, del quale si sono occupati vari autori soprattutto a partire dal 1905, quando il problema fu posto in termini espliciti da G.Jaumann, cfr. la *Historical Introduction* di Truesdell nello

possibile superare definitivamente i limiti posti dalle relazioni lineari che avevano caratterizzato le teorie precedenti, ostacolando una corretta interpretazione dei fenomeni anelastici e favorendo inopinate analogie. Tra queste la più sviante appare proprio quella tra elasticità e fluidodinamica, che abbiamo visto essere alla base delle prime indagini sulla plasticità. A tale indirizzo di ricerca è rimproverato l'uso sistematico e ingiustificato di considerazioni riferite a "limit processes" che trasformano "small velocities", "small relative velocities", "small rates of strain", in elementi probanti di discutibili teorie meccaniche<sup>164</sup>. Per questa ragione Truesdell rifiuta l'accostamento tra la sua teoria e quella elaborata da Prager pochi anni prima: pur animato dalla comune esigenza di descrivere la "continuous transition" tra regime elastico e quello plastico, Prager si era limitato a considerare piccole deformazioni, mentre nell'ipoeleasticità "finite deformations are of the essence of the problem"<sup>165</sup>. Si

---

*H.d.P., III/3 e W.Prager, An elementary discussion of definitions of stress rate, Tech. Report N.53, Brown University, NR. -O64 - 406.*

- <sup>164</sup> Cfr. Truesdell, *The mechanical foundations...*, *cit.*, p. 234, nota 4: "Several authors [O.-E. Meyer, *Theorie der elastischen Nachwirkung, Ann. d. Phys.* (6), **1**, 109, 1874; A.B.Basset, *A treatise on hydrodynamics*, 1888, § 466; L.Lichtenstein, *Grundlagen der Hydromechanik*, 1929, cap. 7, §4; M.Girault, *Essai sur la viscosité en Mécanique des fluides*, Publ. Sci. Tech. Min. de l'Air, n. 4, Paris, 1931, cap. 1; J.H.C.Thomson, *On the theory of visco-elasticity...*, *Phil. Trans. R. Soc. London (A)*, **231**, 339-407, 1933, p. 359; M.Reiner, *A mathematical theory of dilatancy, Amer. J. Math.*, **67**, 1945, p. 355] in pursuing a false analogy between elasticity and fluid dynamics have spoken of «small velocities», «small relative velocities», «small rates of strain», etc., in the present connection. Since none of these quantities is dimensionless, the statements are meaningless, except perhaps as a loose reference to a limit process."
- <sup>165</sup> C.Truesdell, *Hypo-elastic shear, J. Appl. Phys.*, **27**, 1956, pp. 441-447. In particolare p. 442, in nota : "Expressions similar to (8) have occurred in the literature of plasticity theory: H.Fromm, *Ing.-Arch.*, **4**, 432 (1933) e H.Hencky, *Research*, **2**, 437 (1949). In my opinion, the considerations in Fromm's paper are not clear, and those in Hencky's are largely incorrect. The first satisfactory general treatment of invariant time derivatives is that of Oldroyd (*Proc. Roy. Soc. London, A* 200, 532, 1950). So far as I know, the equations of the theory of hypo-elasticity first appeared in Truesdell (*JRMA*, 1953, p.3)". Anche p. 444: "Superficially,

spiega allora l'elogio rivolto a A.Signorini e V.V.Novozhilov<sup>166</sup>, tra i primi ad

---

this work resembles long prior studies by Prager, who for loading in the elastic and plastic regimes alike proposed certain uniform equations in rates. In fact, such resemblance is as shallow as that between hypo-elasticity and the old rate theory of Jaumann. Prager's equations, like Jaumann's, contain the usual undefined time rates of plasticity theory, standing presumably either for the local time derivative or for the material derivative. Thus, apparently, Prager's theory is intended for small deformations. While Prager's work must be regarded as a notable contribution toward a uniform theory of elastic and plastic phenomena, the viewpoint in works on hypo-elasticity is that *finite deformations are of the essence of the problem*. (...). Prager's theory, being partially linearized, fails to predict what i have called hypo-elastic yield in shear, and Prager does not give any hint of the magnitude of the shears for which his theory is intended. Moreover, in his treatment of shear Prager does not mention the accompanying normal stress  $S_{yy}$ , typical of theories of large strain. We note that according to the theory explained below the normal stress, which for small shear is of course of the order of the square of the angle of shear, also rises rapidly to a yield value. (...). Neglect of  $S_{yy}$  is justified, according to the present theory, only for very small  $K$ . (...). The purpose of this footnote is not to compare the physical relevance of Prager's theory and the theory of hypo-elasticity, but only to make it clear that they are different theories." (Cfr. anche W.Prager, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Basel, 1955). Nella conclusione dell'articolo Truesdell scrive: "In the current theories of plasticity, usually limited (if only tacitly) to problems of very small deformations, yield is postulated and the equations governing plastic flow differ from those for the elastic regime. In my opinion, such a distinction and such a postulate are little apt to outlast future study. The results given here and those of Noll (*JRMA*, 1955, p.3) and A.E.Green (*Proc. Roy. Soc.*, London, to be published), constitute the first indications that the phenomenon of yield may be explained rationally on the basis of a uniform, smooth mechanical theory, meaningful alike for small strain and large."

<sup>166</sup> Cfr. Truesdell, *Essays...*, p. 349: "The theory of large deformations (...) has been known by only a few; few have been the papers concerning it, and from 1900 to 1948 general knowledge of it declined to the point that many specialists in mechanics were partially unaware of its existence; and it was not until 1948 that the first book concerning it was published, in Russian". Cfr. V.V.Novozhilov, *Foundations of the nonlinear theory of elasticity*, Rochester, 1953 (edizione originale in russo, 1948), p. VI: "It has been shown recently that the equilibrium of elastic-plastic bodies

affermare l'importanza delle deformazioni finite per un necessario rinnovamento della teoria elastica. Nel I numero del *Journal*, Truesdell aveva già identificato in questi temi la chiave di volta di un nuovo approccio al fenomeno plastico. Al punto F del Programm si legge, infatti: “Some of the general theories presented here represent some aspects of plasticity. It should be possible to study plastic materials with corresponding generality, and corresponding emphasis upon essential non-linear phenomena.”<sup>167</sup> In un passo successivo l'analisi si allarga sino a diventare un vero e proprio riferimento metodologico: “Mechanics as a whole is non-linear; the special parts of mechanics which are linear may seem nearer to common sense, but this shows merely that good sense in mechanics is uncommon. We should not be resentful if materials show character instead of docile obedience. Although mechanics is essential non-linear, it is little exaggeration to say that for 150 years only linear mechanics and its mathematics were studied. (...). While a century of linearization may have largely exhausted its capacities for explaining physical phenomena and have allowed its mathematics to be explored almost to the full, it has fostered a certain rigidity of approach which might be called «linear thinking».”<sup>168</sup>

Contro il *linear thinking*, dunque, che aveva saputo trarre profitto dalle obiettive difficoltà analitiche associate alle formulazioni non-lineari. Ma con eguale severità contro *rheologists* e *dislocationists*, interlocutori naturali della teoria della plasticità.

Ai primi è rimproverata la tendenza a limitare l'attenzione a fenomeni monodimensionali, studiati mediante discutibili modelli composti di “springs and dashpots”, che dovrebbero corrispondere ad elementi a comportamento lineare di tipo elastico e viscoso. Il richiamo a concetti non formalizzati che si riassumono nell’“everything flow” eracliteo e nel cosiddetto “numero di Deborah”, definito come

---

(with certain restrictions) can be examined on the basis of general principles of the theory of elasticity. It is due to this fact, that the problem of the equilibrium of an elastic-plastic medium is, to a certain extent, included in the circle of problems belonging to the nonlinear theory of elasticity.”

<sup>167</sup> Cfr. *JRMA*, **1**, p.261

<sup>168</sup> Cfr. Truesdell, *Essays*, cit., p. 352.

rapporto tra tempo di rilassamento e tempo di osservazione, esclude, secondo Truesdell, la reologia dalla meccanica razionale dei materiali, nella quale si pone una netta distinzione tra il concetto teoretico di equazione costitutiva e la definizione di formule empiriche derivate da esperienze di laboratorio. La valutazione complessiva è, di conseguenza, drastica. Invitato a presentare una relazione sullo sviluppo storico della reologia, Truesdell risponde: “The preliminary program listed as title for this lecture «History of Rheology». That title made the job too easy, because there is no task so easy as an impossible one. (...); Why is it impossible to trace the history of rheology? To trace the history of something, you have to be able to recognize it. What is rheology?”<sup>169</sup>.

Alla teoria delle dislocazioni, invece, è rimproverato un apparato fisico-meccanico che sacrifica logica e chiarezza d'impostazione alla cosiddetta “intuizione fisica”, dalla quale derivano inaccettabili riferimenti a “small, hard balls” e a strutture geometriche imposte a priori. Mancanze originarie e irrimediabili che accomunano la teoria delle dislocazioni a quella molecolare, alle quali viene contrapposto una “clear, open, logically sound, continuum basis for a continuum theory”<sup>170</sup>. Oltre a ciò,

---

<sup>169</sup> Cfr. C.Truesdell, Sketch for a History of constitutive relations, *Proc. VIII Int. Congr. on Rheology* (1980), New York, 1980, p. 1.

<sup>170</sup> Cfr. Truesdell, *Six Lectures*, cit., 15 e segg.: “Not long ago was born a new branch of continuum mechanics called the «theory of dislocations». Since this theory has grown up mainly in laboratories of solid-state physics, it has been presented in a language of its own, in which clarity and logic take a poor second place to physical intuition. What is assumed is rarely distinguished from what is left to be proved, and the final appeal, in every case of doubt, seems to be to a model of matter as composed of small, hard balls. On this basis, a peculiar geometric structure, not occurring elsewhere in mathematical physics, is assigned *a priori* to the body and is discussed in the unnumbered repetitions of an exuberant literature. Those who have failed to become converts to the hard-ball view are told they lack physical intuition. This is surely true but does not obviate the need for a clear, open, logically sound, continuum basis for a continuum theory. The history of physics shows that different, apparently almost contradictory hypotheses of structure and definitions of gross variables based upon them lead to the same equations for continua.” La critica alla teoria delle dislocazioni risulta

Truesdell contesta che il ricorso al gradiente della deformazione escluda la possibilità di coinvolgere la teoria delle dislocazioni nella meccanica razionale del continuo. Noll, infatti, ha dimostrato che se la teoria delle dislocazioni è ricondotta ad un apparato matematico rigoroso e coerente, essa costituisce un caso particolare della teoria dei materiali semplici, dove le caratteristiche di non omogeneità materiale sono collegate ai fenomeni dislocativi<sup>171</sup>.

### 3.6. *La posizione di Drucker.*

Nelle parole dei suoi sostenitori, l'ipoelasticità sembra aver definitivamente risolto uno dei problemi più spinosi della meccanica dei materiali. In realtà provoca

---

analoga a quella già avanzata contro la teoria molecolare dell'elasticità e qui ripresa (p.15): "Molecular hypotheses have come and gone, but a sound continuum theory is a monument forever, exempt from fashion." Anche *Handbuch der Physik*, III/3, p. 88, nota 2, con riferimento ai principali studiosi di teoria delle dislocazioni: "These authors either lay down a *a priori* some geometric structure on the basis of considerations of lattice defects in crystals or else, and often also, they employ some very special constitutive equation, usually a linear approximation to some standard equation of elasticity or plasticity. Noll's theory, on the other hand, is free from *ad hoc* assumptions. As will be seen from the outline given above in the text, he shows that once a constitutive equation such as to define a materially uniform simple body is laid down, the geometric structure in the body is determined. Thus the geometric structure is the outcome, not the first assumption, of the physical theory. In one respect, however, Noll's theory is less general than some above referenced, since couple-stresses are excluded from the start. That couple-stresses are really needed for an adequate description of the behavior of real solids has not yet been shown, in our opinion. In any case, a treatment of the polar-elastic media of Toupin along the lines of Noll's theory of simple materials can surely be constructed, though as yet it has not been, and such a treatment must yield the geometry of the body manifold from the forms of the constitutive equations of the particles. The geometrical structure resulting must contain as a special case the one developed in our text above."

<sup>171</sup> "A theory of «dislocations» results necessarily as soon as one considers bodies materially uniform but not homogeneous." (*Six Lectures*, p. 16).

anch'essa alcune radicali obiezioni: la reazione dei maggiori cultori della teoria della plasticità non si fa attendere e ha così inizio un acceso dibattito che inasprisce le naturali divergenze di metodo. Nel volume dell'autorevole *Handbuch der Physik* dedicato a *Elastizität und Plastizität*, Freundenthal e Geiringer<sup>172</sup> ripropongono l'impianto teorico contestato da Truesdell e affermano che l'ipoelasticità indica interpretazioni fisiche “flatly contradicted” da numerose esperienze di laboratorio, nelle quali è stato verificato che l'inizio dello snervamento è associato a deformazioni relativamente piccole; secondo i due autori l'adozione del legame ipoelastico non trova giustificazione nelle caratteristiche del fenomeno plastico, anche se esso deve essere considerato una interessante generalizzazione dell'equazione costitutiva relativa ai materiali elastici classici.

In questa obiezione Truesdell vede riaffiorare i tratti salienti dell'impostazione tradizionale, rispetto alla quale la sua teoria voleva rappresentare un contributo innovativo. La risposta tradisce, infatti, stupore e asprezza polemica: “While noticeable magnitudes of normal-stress differences are correctly associated with large strain, and while only small strains will be of interest in a case when  $M$  (yield point) is very small, nevertheless it is *never* right to drop the normal-stress term. These are terms, *no matter how small they are*, that not only make the equations frame-indifferent but also give rise to the definite yield point. In this sense, in the example presented, yield in hypo-elasticity is *associated with effects of finite strain, no matter how small may be the strain itself at yield*. The dropping of small terms in

---

<sup>172</sup> Cfr. Freundenthal (*H.d.P.*, VI, pp. 262-263): “These claims that have been made in the physical interpretation of the equations of the hypo-elastic body are, however, flatly contradicted by the fact, confirmed in innumerable experiments, that the start of plastic yielding is associated with strains of an order of magnitude justifiably considered small, and that such yielding is physically sharply distinct from elastic straining. For large strains, however, the latter may produce conditions of elastic instability (buckling), with stress-strain relations *in shape though not in scale of the deformation* asymptotic conditions of yielding. The hypoelastic medium, being an interesting generalization of the classical elastic medium, is therefore unrelated to the plastic continuum in which the existence of the mechanism of energy dissipation through the motion of dislocations does not depend on the assumption that the over-all strains are large.”

equations is a custom so deeply ingrained as to have made, apparently, the foregoing distinction a hard one to grasp”<sup>173</sup>.

Rimproveri severi che contrappongono rigidamente le esigenze assiomatiche della meccanica del continuo a quelle teorico-sperimentali della meccanica applicata e sembrano far svanire la speranza di trovare una mediazione sulla questione del criterio di snervamento. Esempio, a questo riguardo il confronto con uno dei padri della moderna teoria della plasticità, D.C.Drucker. La polemica tra i due autori raggiunge il suo culmine al congresso "*Second-order effects in elasticity...*", Haifa, 1962 (Truesdell, C., *Second-order effects in the mechanics of materials, Proc. Symp. "Second-order effects in elasticity..."*, Haifa, 1-47, 1962), dove Truesdell è incaricato di introdurre i lavori con una general lecture "sugli effetti del secondo ordine nella meccanica dei materiali". Senza lasciarsi intimidire dal carattere celebrativo dell'occasione, egli ribadisce con inequivocabile chiarezza le ragioni della sua presa di posizione, insinuando il dubbio che, almeno per ciò che riguarda la plasticità, il tema dell'incontro sia stato mal posto: "Despite the title of the Symposium, I cannot say anything about plasticity. Apart from some limit theorems of hypo-elasticity, I know of no successful attempt to connect the contents of treatises on plasticity with the general principles of the mechanics of materials. It is difficult to state clearly why it is that plasticity and the rest of mechanics have gone separate ways, but it is a fact that they have, and I cannot see that the foundations of plasticity are yet secure enough for us to give a sound definition of second-order effects within it"<sup>174</sup>.

I severi ammonimenti di Truesdell sono raccolti da Drucker, che si riserva il compito di proporre una lettura più conciliante delle problematiche segnalate dal

---

<sup>173</sup> C.Truesdell, *H.d.P.*, III/3, p. 426.

<sup>174</sup> C.Truesdell, *Second-order effects...*, *cit.*, pp.9-10. In nota si aggiunge: "On the one hand, some of the theories of plasticity, such as the Prandtl-Reuss theory, are not properly invariant except subject to uncertain and dimly stated special assumptions about the deformation and motion we are expected to find by solving the equations. Those that are properly invariant, such as Saint-Venant - Lévy - Mises theory, are rarely approached except subject to interpretation of velocities as displacements and to neglect of the inertia of the material in flow. If, as the enthusiasts of these theories state, their procedures are justified, the burden of proof lies upon them."

collega, nella quale è ribadita l'impossibilità di formulare una teoria elasto-plastica generale che abbia i requisiti richiesti da Truesdell e nel contempo soddisfi le esigenze applicative. La complessità della realtà fisica, afferma Drucker, impone inevitabili semplificazioni dalle quali la teoria della plasticità non può prescindere; senza nulla togliere all'impostazione favorita da Truesdell e dai suoi discepoli, egli ribadisce la complementarità dei due approcci e sottolinea l'importanza e l'urgenza degli interrogativi di ordine operativo ai quali l'ingegnere è chiamato a dare una risposta immediata ed efficace<sup>175</sup>. Due anni più tardi Drucker torna sull'argomento

---

<sup>175</sup> Leggendo la sua appassionata difesa sembra di riascoltare le ragioni di Saint-Venant contro il rigorismo matematico di Lamé, risolto con la soluzione intermedia offerta dal metodo *semi-inverso*. Soluzione che non risolve il conflitto ma indica le aporie sulle quali avevano fatto leva le posizioni rivali. Cfr. Drucker, D.C., *Survey on second-order plasticity, Proc. Symp. "Second-order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics"*, Haifa, 416-423, 1962; pp. 416-417: "At first thought, the set of papers presented under the label of PLASTICITY seemed too diverse to permit a unified survey. Fortunately, some of the opening statements by Professor Truesdell crystallized for me the essential unity of so much of the work. In his usual elegant, concise, and provocative style he said that he found it difficult to understand why plasticity and the rest of mechanics had gone separate ways. One of his point in elaboration was his feeling that a yield criterion should be an outcome of theory and not a postulate. (...). Surely I speak for all of us who have been labelled as plasticians for the purpose of this meeting, when I say that we believe that most of mechanics adopts our philosophy. No branch of mechanics, or rheology, should turn its back on physical reality. We can but hope that all branches will join our forward stream which absorbs physical information as it is developed and translates it into useful mathematical terms(...). The converse approach often is of great value. Professor Truesdell and his disciples have contributed enormously to the clarification of physical thought by their cautions against mathematically inappropriate developments. However, we shudder at the idea that a flattening of the stress-strain curve predicted to occur at very large strains in a homogeneous non-linear elastic body should be translated as the yielding of an elastic-plastic metal, a phenomenon which occurs at strains of the order of 0,001 after nearly perfectly linear behavior(...). Essential physical concepts must be incorporated in theory at the beginning. They are not produced by the mathematical formalisms. The best theory is the simplest self-consistent one containing the basic ideas necessary for the problem at hand.

per difendere il suo *postulato*. All'impostazione di Truesdell viene associata quella di Pipkin e Rivlin - entrambe animate dal proposito di stabilire un approccio unitario alla meccanica dei materiali sulla base di rappresentazioni funzionali che salvaguardino la generalità del problema matematico - per affermare che il richiamo ad alcune ipotesi fisiche rimane ineludibile sinché si cercheranno soluzioni che sappiano interpretare in modo soddisfacente le analisi sperimentali, riferimento essenziale anche per una meccanica dei materiali che voglia apparire rigorosamente razionale. “Furthermore - aggiunge Drucker -, the mathematical forms tend to become so difficult to comprehend in physical terms that grossly incorrect results or very misleading results may be undetected. For example, on one extreme the second law of thermodynamics may be violated, while on the other extreme the «higher order» terms which are dropped in one treatment may be physically meaningful terms which

---

Completeness is impossible; physical reality is so complex that it must be idealized if it is to be formalized. Truly elastic or truly plastic materials do not exist. These are names given to those aspects of material order value in comparison with the theory of elasticity for small strains and rotations, or the theory of elasticity for large displacements when the latter is required by the material or the problem.(...). Experimentalists should be aware of the limitations of the most complicated and learned-appearing theory of idealized materials. Mathematicians should be aware of the limitations of experimental results obtained with the shiniest and the most expensive of apparatus. If proper decisions are to be made, rheologists had better understand and participate, in a limited way at least, in both theory and experiment.” In nota si rinvia a Drucker, *The Role of Experiment in the Development of Theory (Proc. 4<sup>th</sup> U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1, 15-33, 1962)*, che ribadisce la contrapposizione tra il rigorismo truesdelliano e le istanze teorico-sperimentali della teoria della plasticità; pp. 16-17: “To some extent it was permissible to carry over to the theory of time-independent plasticity the attitude of confidence and precision engendered by the success of elasticity theory. The geometry of plastic deformation can be predicted moderately well, and the load carrying capacity of most structures and parts can be found with appropriate accuracy. Details, however, are likely to be very fuzzy. Actual stress-strain relations are very complex. Therefore any comparison between reality and prediction of the most complex mathematical development will be poor in fine detail and, perhaps, in some gross features as well. A considerable body of theory is needed which is quite distinct from the mathematical analysis of problems. Experiment is in no sense verification or analog computation but is of primary importance.”

conceivably might appear as low order in another type of expansion. These are not criticisms of the approach but rather cautions on the indiscriminating use of any approach. If the search for unity is reasonable, some broad physically based concept is needed.”<sup>176</sup>

Il tono pacato delle argomentazioni di Drucker non riesce a nascondere una preoccupante incomunicabilità tra le diverse posizioni in conflitto. Un solco profondo si è aperto tra due scuole di pensiero e la teoria della plasticità, col suo bagaglio di certezze poste a cavaliere tra “theory and experience” indica alcuni elementi cruciali del contendere, senza esaurirne le ragioni. Lo dimostra una interessante panoramica storica<sup>177</sup> pubblicata da Truesdell molti anni più tardi, nella quale il declino della meccanica classica è associato al trionfo della meccanica applicata modernamente intesa; ad essa e, in particolare, a due dei suoi più autorevoli rappresentanti, L.Prandtl e G.I.Taylor, è addebitato l'accumulo di “mountains of special cases, stored like lumber against the possibility that some day some engineer might use them”.<sup>178</sup> La teoria della plasticità è soltanto un tassello di questo filone di ricerche dal quale Truesdell prende le distanze, ma più di ogni altro esso sintetizza le inevitabili contraddizioni tra istanze teoretiche ed applicative della meccanica dei materiali.

---

<sup>176</sup> Cfr. D.C.Drucker, On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, *Jour. de Mécanique*, **3**, 1964, 234-249, a p. 236.

<sup>177</sup> C. Truesdell, History of Classical Mechanics, *Die Naturwissenschaften*, **63**, 1976; Part I, to 1800 (pp. 53-62); Part II, the 19th and 20th Centuries (pp. 119-130).

<sup>178</sup> *Ibidem*, p. 128; rimproveri nei confronti della meccanica applicata sono presenti in molti scritti di Truesdell. Cfr., ad esempio, C.Truesdell, *Rational mechanics of materials*, in *Six Lectures*, cit., p. 19: “Once the core of the classical mechanics of materials had been straightened and annealed by these clear and embracing concepts and definitions, it became a mathematical science after the manner of geometry, with a breadth of application no competent critic denies. While the oldsters of «applied mechanics» shook their pates and tugged their smooth-shaven chins at the abstraction needed to contemplate a tensor-value functional of tensor-histories of the deformation of a manifold, the practice of the subject poured out major theorems made possible by simplicity of this very idea.”

### 3.7. Considerazioni conclusive.

L'eterogeneità degli approcci disciplinari ai quali si è fatto cenno è un segno dell'intreccio di problemi che si celano dietro la definizione di *criterio di plasticità*. La sorprendente molteplicità d'intenti, talvolta apparentemente inconciliabili, ha condizionato il severo giudizio di Truesdell nei riguardi delle teorie che avevano cercato di offrire risposte teoriche "with a view toward applications". Resta tuttavia da valutare se l'evidente disagio mostrato dalla teoria della plasticità di fronte all'esigenza di darsi una struttura teoretica adeguata non sia anche, se non soprattutto, uno stimolo di riflessione per la stessa *rational mechanics of materials*, che trova nel criterio di snervamento un imbarazzante elemento di contraddizione<sup>179</sup>.

Nel grande progetto di assiomatizzazione promosso da Truesdell, la meccanica del continuo è ricondotta all'interno di una struttura formale "*mathematical and hence strictly logical, like classical geometry*"<sup>180</sup>. L'intento di studiare il comportamento materiale *more geometrico* si collega esplicitamente al programma esposto da Hilbert nei celebri *Mathematische Probleme*. Le questioni rimaste aperte non consentono, tuttavia, di condividere l'orgoglioso grido hilbertiano: "*kein ignorabimus!*"<sup>181</sup> Lo dimostra l'accesa disputa sorta tra Truesdell e Drucker

---

<sup>179</sup> I problemi posti dalla teoria della plasticità hanno dato impulso alla ricerca sui principi generali della meccanica del continuo e non sorprende che dopo aver assolto un ruolo determinante proprio la plasticità sia rimasta per lungo tempo esclusa dal processo di assiomatizzazione: è un dato caratteristico della storia della scienza, infatti, che le questioni di maggior momento guidino la riflessione critica e siano tanto più efficaci quanto più oscura e inaccessibile è la posta in gioco.

<sup>180</sup> C.Truesdell, *Method and taste in natural philosophy*, in *Six Lectures...*, p. 94, dopo aver descritto le proprietà della geometria moderna.

<sup>181</sup> Questa famosa espressione di Hilbert (cfr. D.Hilbert, *Mathematische Probleme*, *Archiv der Mathematik und Physik*, III Ser., 1, 1901, p.52), ripresa dallo stesso Truesdell per indicare la prospettiva nella quale si muove l'impostazione assiomatica, deve essere interpretata nel contesto dell'epoca. Essa, infatti, non costituisce una peculiarità hilbertiana, ma semmai la spia di quanto Hilbert risentisse dello *Zeitgeist* che guidò, in misura più o meno accentuata, tutti i relatori del congresso di Parigi,

intorno al problema del criterio di snervamento, nella quale ricorre spesso l'annosa distinzione tra istanze teoriche e ragioni dell'esperienza. Un approfondimento critico consentirebbe di chiarire che tale dibattito nasconde - e rivela nello stesso tempo - l'incolmabile iato tra verità di ragione e verità di fatto, tra principio di contraddizione e di ragion sufficiente, tra mondi possibili e controfattuali, o ancora, per utilizzare un'efficace espressione scolastica, tra questioni *de re* e *de facto*. E' la difficoltà di coniugare l'opacità del dato esperienziale con la trasparenza del concetto.

Nel caso della meccanica, l'*impalpabile concretezza* del dato sperimentale ha impedito che il processo di rigorizzazione potesse avverarsi nei tempi e nei modi previsti dai precursori. Il progetto di ridurre il reale al suo sosia ovvero, come dice Truesdell, di operare su equazioni costitutive che fungono da *Doppelgänger*<sup>182</sup> del materiale, ha raggiunto punte estreme di astrazione e una sorta di sindrome del *Doppelgänger* ha minacciato lo sviluppo della Meccanica dei materiali; la progressiva divaricazione tra realtà e sua immagine aveva spinto i ricercatori a trascurare l'aderenza del modello con la realtà o, comunque, a porla in secondo piano, mentre altre discipline avevano avvertito già da molto tempo il rischio di tale operazione, pericolosamente sporgente su una gigantesca ed *elende Tautologie*.

---

indetto in concomitanza con l'Esposizione Universale. Cfr. J.L.Heilbron, *Fin-de-siècle Physics*, in *Science, technology and society in the time of Alfred Nobel*, Nobel Symposium 52, Oxford-New York, 1982, pp. 51-73. Secondo Truesdell la prima formulazione assiomatica della meccanica risale a G.Hamel (Die Grundlagen der Mechanik, *Math. Annalen*, **66**, 1909, 350-397) che seguendo un suggerimento di Klein (ricordato dallo stesso Hamel a p. 351 del suo scritto), mise in evidenza come il contenuto della meccanica del punto materiale (mass-point) segua come caso particolare dalla continuum mechanics, e quindi gli studi sulla fondazione della meccanica debbano riguardare i *continui deformabili* (cfr. C.Truesdell, *The mechanical foundations...*, *JRMA*, **1**, 1952, 157, nota 1). Anche C.Truesdell, *Rational mechanics of materials*, in *Six Lectures*, cit., p.2: "The science we call to our aid in constructing instruments with which to see nature is mathematics. Rational mechanics was the first domain of natural philosophy on which modern mathematics was brought to bear so as to form a real theory, comparable in generality and precision to classical geometry."

<sup>182</sup> C.Truesdell, *Sketch...*, cit., p. 2.

Lo studio attento e rigoroso dell'evoluzione storica della disciplina può, in questa direzione, svolgere un ruolo di assoluto rilievo. Lo stesso Truesdell ha configurato un movimento pendolare nell'evoluzione della meccanica e sollecitato una salutare dialettica tra i diversi “scientific methods”<sup>183</sup>, che trovano nella riflessione storica un indispensabile *termine medio* cui affidare il ruolo riflessivo che spetta al momento critico. Nel caso della teoria della plasticità occorre esplorare con attenzione congiunzioni e analogie nei diversi approcci disciplinari, al fine di garantire al fenomeno del cedimento plastico una descrizione rispettosa delle diverse istanze affermatesi nel corso del dibattito.

---

<sup>183</sup> cfr. C.Truesdell, *History of Classical Mechanics, cit.*, p. 130.

## BIBLIOGRAFIA

- 1729 MUSSCHENBROEK, P. van, *Dissertationes physicae experimentales et geometricae*, Leida
- 1773 COULOMB, C.A., Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis ..., *Mémoires de Math. et Phys.* (1776), 343-382
- 1788 DELANGES, P., Statica e meccanica de' semifluidi, *Memorie di Matematica e Fisica della Soc. Italiana*, **4**, 329-368
- 1798 GIRARD, P.S., *Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égale résistance*, Paris
- 1823 CAUCHY, A., Recherches sur l'équilibre et le mouvement des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, (1822), *Bull. des Sci. Soc. Phil. Paris*, 9-13
- 1823 NAVIER, L., Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, *Bull. Sci. Soc. Phil. Paris*, 177-181
- 1827 CAUCHY, A., De la pression dans les fluides, *Ex. de Math.*, **2**, 23-24
- 1827 CAUCHY, A., De la pression ou tension dans un corps solide, *Ex. de Math.*, **2**, 42-56; Addition, 57-59
- 1827 CAUCHY, A., Sur la condensation et la dilatation des corps solides, *Ex. de Math.*, **2**, 60-69
- 1827 CAUCHY, A., Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices, *Ex. de Math.*, **2**, 108-111
- 1828 CAUCHY, A., Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique, *Ex. de Math.*, **3**, 160-187
- 1828 CAUCHY, A., Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attractions ou de répulsions mutuelle, *Ex. de Math.*, **3**, 188-212
- 1828 CAUCHY, A., De la pression ou tension dans un système de points matériels, *Ex. de Math.*, **3**, 213-236

- 1829 CAUCHY, A., Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues, *Ex. de Math.*, **4**, 293-319
- 1829 POISSON, S.D., Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques et des fluides, *Ann. de Chi. et de Phys.*, **42**, 145-171
- 1841 PONCELET, J.V., *Introduction à la mécanique industrielle, physique et expérimentale*, Metz
- 1844 SAINT- VENANT, B. de, Sur la définition de la pression dans les corps fluides ou solides en repos ou en mouvement, *L'Institut*, n. 524, 12-13
- 1845 SAINT- VENANT, B. de, Note sur la pression dans l'intérieur des corps ou à leurs surfaces de séparation, *Comptes Rendus*, **21**, 2<sup>^</sup>sem., 24-26
- 1845 STOKES, G.G., On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, in *Mathematical and Physical Papers*, **1**, Cambridge, 1880
- 1846 HAUGHTON, S., On the Laws of Equilibrium and Motion of Solid and Fluid Bodies, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **1**, 173-182; versione riveduta in *Trans. Roy. Irish Acad.*, **21**, 1849, 151-198
- 1847 HOPKINS, W., On the internal pressure to which rock masses may be subjected, and its possible influence in the production of the laminated structures, *Cambridge Phil. Trans.*, **7**, 1849, 456-470
- 1847 SAINT-VENANT, B. de, Sur la théorie de la résistance des fluides. Solution du paradoxe proposé à ce sujet par d'Alembert aux géomètres. Comparaison de la théorie aux expériences, *Comptes Rendus*, **24**, (estratto)
- 1848 WEISBACH, J., Die Theorie der zusammengesetzten Festigkeit, *Der Ingenieur*, **1**, 252-265
- 1849 HAUGHTON, S., On a classification of elastic media, and the laws of plane waves propagated through them, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **22**, Part 1, 97-138
- 1849 MAXWELL, J.C., Draft of paper "On the equilibrium of elastic solids", (Autunno 1849-Primavera 1850), in *The scientific letters and papers of J.C. Maxwell*, 1 (1846-1862), Cambridge Univ. Press, 1990, 133-182
- 1850 JELLET, J.H., On the equilibrium and motion of an elastic solid, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **22**, Part 3, 179-217

- 1850 MAXWELL, J.C., Abstract of paper “On the equilibrium of elastic solids”, in *The scientific letters and papers of J.C. Maxwell*, **1** (1846-1862), Cambridge Univ. Press, 1990, 184-185
- 1850 RANKINE, W.J.M., On the vibrations of plane-polarised light, (1850), in *Miscellaneous Scientific Papers*, London 1881, 150 e ssgg.
- 1850 RANKINE, W.J.M., Laws of the elasticity of solid bodies, (1850), *The Cambridge and Dublin Math. Journ.*, **6**, 1851, 47-80 e 178-181
- 1851 RANKINE, W.J.M., The centrifugal theory of elasticity and its connection with the theory of heat, in *Miscellaneous Scientific Papers*, London 1881
- 1856 MAXWELL, J.C., Letter to William Thomson, 17 dicembre 1856, in *The Scientific Letters and Papers of J.C. Maxwell*, **1**, Cambridge Univ. Press, 1990, 482-491
- 1858 RANKINE, W. J.M., *A Manual of Applied Mechanics*, London
- 1860 NEUMANN, C., Zur Theorie der Elasticität, *J. reine angew. Math.*, **57**, 281-318
- 1862 CLEBSCH, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, Leipzig
- 1862 SAINT-VENANT, B. de, Lettera a G.G.Stokes del 22 gennaio 1862, in *Memoirs and scientific correspondence*, **1**, Cambridge, 1907, 156-159
- 1863 SAINT-VENANT, B. de, Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point..., *J. Math. Pures et Appl.*, **8**, 257-295; 353-430
- 1864 SAINT-VENANT, B. de, [NAVIER, L.], *Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines, avec des Notes et des Appendices par M.Barré de Saint-Venant*, Paris
- 1864 TRESCA, H., Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions, *Comptes Rendus*, **59**, 754-758
- 1865 THOMSON, W., On the elasticity and viscosity of metals, *Proc. Roy. Soc. London*, **14**, 289-297
- 1865 TRESCA, H., Experiments on the production of cylinders of ice by pressure through orifices, *Phil. Mag.*, **30**, 239-240
- 1866 KLEITZ, C., Sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, avec application à l'hydrodynamique, *Comptes Rendus*, **63**, 2<sup>^</sup>sem., 988-99

- 1866 MAXWELL, J.C., On the dynamical Theory of gases, in *Scientific Papers*, II, London 1890, 26-78
- 1867 THOMSON, W., TAIT, P.G., *Treatise on Natural Philosophy*, Oxford; analogia idrodinamica all'Art. 705
- 1868 TRESCA, H., Mémoire sur l'écoulement des corps solides, *Mém. pres. par div. Savants*, **18**, 733-799
- 1869 TRESCA, H., Mémoire sur le poinçonnage et la théorie mécanique de la déformation des métaux, *Comptes Rendus*, **68**, 1197-1201
- 1870 LÉVY, M., Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, (extrait), *Comptes Rendus*, **70**, 1323-1325
- 1870 MORIN, (rapporteur), Rapport sur le mémoire présenté à l'Académie le 29 mai 1869 par M. Tresca, sur le poinçonnage et sur la théorie mécanique de la déformation des corps solides, *Comptes Rendus*, **70**, 288-308
- 1870 SAINT-VENANT, B. de, Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité, *Comptes Rendus*, **70**, 309-311
- 1870 SAINT-VENANT, B. de, (rapporteur), Rapport sur un complément présenté par M. Tresca le 7 février 1870 à son mémoire du 27 novembre 1864 relatif à l'écoulement des corps solides malléables poussés hors d'un vase cylindrique par un orifice circulaire, *Comptes Rendus*, **70**, 368-369
- 1870 SAINT-VENANT, B. de, Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, *Comptes Rendus*, **70**, 473
- 1870 TRESCA, H., Mémoire sur le poinçonnage des métaux et des matières plastiques, *Comptes Rendus*, **70**, 27-31
- 1871 BOUSSINESQ., J., Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres, *J. de Math.*, 2<sup>ser.</sup>, **16**, 125-274
- 1871 LÉVY, M., Extrait du mémoire sur les équations générales..., *J. de Math.*, 2<sup>ser.</sup>, **16**, 369-372

- 1871 LÉVY, M., Sur l'intégration des équations aux différences partielles, relatives aux mouvements intérieurs des corps solides ductiles, lorsque ces mouvements ont lieu par plans parallèles, *Comptes Rendus*, **73**, 1098-1103
- 1871 SAINT-VENANT, B. de, Complément aux mémoires du 7 mars 1870 de M. de Saint-Venant et du 19 juin 1870 de M. Lévy, sur les Equations différentielles *indéfinies* du mouvement intérieur des solides ductiles, etc.; - Equations *définies* ou relatives aux limites de ces corps; - Applications, *J. de Math.*, **16**, 373-382
- 1871 SAINT-VENANT, B. de, (rapporteur), Rapport sur un mémoire de M. Lévy, relatif aux équations générales du mouvement intérieur des corps solides ductiles, au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, *Comptes Rendus*, **73**, 86-91
- 1871 SAINT-VENANT, B. de, Sur la mécanique des corps ductiles, *Comptes Rendus*, **73**, 1181-1184
- 1871 TRESCA, H., Etude sur la torsion prolongée au delà de la limite d'élasticité, *Comptes Rendus*, **73**, 1104-1105
- 1872 BOUSSINESQ, J., Lois géométriques de la distribution des pressions, dans un solide homogène et ductile soumis à des déformations planes, *Comptes Rendus*, **74**, 242-246
- 1872 BOUSSINESQ, J., Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles des cylindres isostatiques produits dans un solide homogène et ductile, *Comptes Rendus*, **74**, 318-321
- 1872 BOUSSINESQ, J., Equations aux dérivées partielles des vitesses, dans un solide homogène et ductile déformé parallèlement à un plan, *Comptes Rendus*, **74**, 450-453
- 1872 SAINT-VENANT, B. de, Sur un complément à donner à une des équations présentées par M. Lévy pour les mouvements plastiques qui sont symétriques autour d'un même axe, *Comptes Rendus*, **74**, 1083-1087
- 1872 SAINT-VENANT, B. de, Mémoire sur l'hydrodynamique des cours d'eau, *Comptes Rendus*, **74**
- 1872 TRESCA, H., Rapport sur un mémoire de M. Kleitz intitulé: "Etudes sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, et application à l'hydrodynamique", *Comptes Rendus*, **74**, 1<sup>er</sup> sem., 426-438

- 1872 TRESCA, H., Sur l'intensité des forces capables de déformer, avec continuité, des blocs ductiles, cylindriques, pleins ou évidés, et placés dans diverses circonstances, *Comptes Rendus*, **74**, 1009-1015
- 1873 KLEITZ, C., *Etudes sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement et application à l'hydrodynamique*, Paris 1873
- 1873 LIPSCHITZ, R., Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie, *Math. Annalen*, **6**, 416-435
- 1874 LIPSCHITZ, R., Beweis eines Satzes der Elasticitätslehre, *J. reine und angew. Math.*, **78**, 329-337
- 1874 MAXWELL, J.C., Über Doppelbrechung in einer bewegten zähen Flüssigkeit, *An. Phys. und Chemie*, **1**, 6<sup>^</sup>Reihe, 151-154
- 1874 MEYER, O.E., Theorie der elastischen Nachwirkung, *Ann. Phys. und Chemie*, **1**, 6<sup>^</sup>Reihe, 108-119
- 1875 MAXWELL, C., Lettera a G.G.Stokes del 25 settembre 1875, in *Memoirs and scientific correspondence*, **1**, Cambridge, 1907, 36-37
- 1875 MEYER, O.E., Zur Theorie der inneren Reibung, *J. reine und angew. Math.*, **78**, 130-135
- 1875 SAINT-VENANT, B. de, De la suite qu'il serait nécessaire de donner aux recherches expérimentales de Plasticodynamique, *Comptes Rendus*, **81**, 115-121
- 1876 MAXWELL, J.C., Constitution of Bodies, in *Encycl. Britannica*, 9<sup>^</sup>Ed., 310; anche *The Scientific Papers of J.C.Maxwell*, **2**, Cambridge 1890, 616-624;
- 1879 LAMB, H., *Hydromechanics*, (1<sup>^</sup>Ed. 1879), Cambridge Univ. Press, 1932 (6<sup>^</sup>Ed.)
- 1880 CASTIGLIANO, A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Torino
- 1880 SAINT-VENANT, B. de, Géométrie cinématique. Sur celle des déformations des corps soit élastique, soit plastique, soit fluides, *Comptes Rendus*, **90**, 53-56
- 1882 BELTRAMI, E., Sulle equazioni generali dell'elasticità, (1880-1882), in *Opere Matematiche*, **3**, 383-407

- 1883 CLEBSCH, A., *Théorie de l'élasticité des corps solides, traduite par MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant*, Paris
- 1885 BELTRAMI, E., Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici, *Rend. Reale Ist. Lom.*, **18**, 2<sup>a</sup>ser., 704-714
- 1885 FISCHER, H., Beitrag zur mechanischen Untersuchung plastischer Körper, *Der Civilingenieur*, **31**, 482-500
- 1885 LÉVY, M., Discours prononcé aux obsèques de M. Tresca, *Comptes Rendus*, **100**, 1610-1614
- 1885 NEUMANN, F., *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers*, Berlin, 1885
- 1885 REYNOLDS, O., On the Dilatancy of Media composed of Rigid Particles in Contact, *Phil. Mag.*, **20**, n. 127, 469-481
- 1885 SAINT-VENANT, B. de, Sur le but théorique des principaux travaux de H. Tresca, *Comptes Rendus*, **101**, 119-122
- 1886 TODHUNTER, P., PEARSON, K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, vol. **1**, Cambridge Univ. Press
- 1887 IBBETSON, W.J., *An elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids, with a short account of viscous fluids*, Macmillan, London
- 1888 BARUS, C., Maxwell's Theory of the Viscosity of Solids and its Physical Verification, *Phil. Mag.*, (5), **26**, 183-217
- 1888 BASSET, A.B., *A Treatise on Hydrodynamics*, 2 voll., Cambridge
- 1888 CROTTI, F., *La teoria dell'elasticità*, Hoepli, 1888
- 1888 Anonima recensione al primo volume della *History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials* di Todhunter e Pearson, in *Bull. Sci. Math.*, **12**, 38-40
- 1889 PHILIPS, M., Congrès International de Mécanique appliquée, *Comptes Rendus*, **109**, 491-492
- 1890 BRILLOUIN, M., Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides, *Ann. Ecole Normale Sup.*, III série, **7**, 345-360

- 1891 DUHEM, P., *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, (Cours professé en 1890-'91), Hermann, Paris
- 1891 FAURIE, G., Sur les lois de l'écroissage et des déformations permanentes, *Comptes Rendus*, **113**, 349-350
- 1892 LOVE, A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge, (1892-'93)
- 1893 THOMSON, W., On the elasticity of a crystal according to Boscovich, *Proc. Roy. Soc. London*, **54 B**, 59-75.
- 1893 TODHUNTER, P., PEARSON, K., *A History of the Theory of Elasticity...*, vol. II, Cambridge Univ. Press
- 1894 BACH, C., *Elasticität und Festigkeit*, Berlin
- 1894 FREMONT, C., Théorie expérimentale du cisaillement et du poinçonnage des métaux, *Comptes Rendus*, **119**, 998-1003
- 1894 VOIGT, W., Beobachtungen über die Festigkeit bei homogener Deformation, *Annalen der Physik und Chemie*, **53**, 43-56, (già in Gött. Nachr., n.13, p. 521, 1893)
- 1895 FAURIE, G., Sur les variations de l'écroissage des métaux, *Comptes Rendus*, **120**, 1407-1413
- 1895 FAURIE, Sur les déformations permanentes et la rupture des corps solides, *Comptes Rendus*, **121**, 343-345
- 1897 MEHMKE, R., Zum Gesetz der elastischen Dehnungen, *Zeits. Math. Phys.*, **42**, 327-338
- 1899 VOIGT, W., Beobachtungen über Festigkeit bei homogener Deformation, angestellt von L. Januszkiewicz, *Annalen der Physik und Chemie*, **67**, 452-458
- 1900 GUEST, J.J., On the Strength of Ductile Materials under Combined Stress, *Phil. Mag.*, **50**, 69-132
- 1900 SCHWEDOFF, T., Die Starrheit der Flüssigkeiten, *Phys. Zeits.*, **1**, 552-554; resoconto di S. Oppenheimer della relazione tenuta dall'autore al Congresso Internazionale di Fisica (Parigi, 1900)
- 1900 VOIGT, W., Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Kristallelasticität, (Referat für den internationalen physikalischen Congreß in Paris vom 6. bis 12. August 1900, *Nachr. K. Gesell. Wiss. Gö*; 117-176

- 1900 VOLTERRA, V., *Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse*, Conferenza tenuta il 6 agosto 1900 nella seduta d'apertura del II Congresso internazionale dei Matematici, Parigi, (estratto), 1-15
- 1901 NATANSON, L., Sur les lois de la viscosité, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 95-111
- 1901 NATANSON, L., Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 161-171
- 1901 NATANSON, L., Sur les lois de la diffusion, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 335-348
- 1901 VOIGT, W., Zur Festigkeitslehre, *Annalen der Phys.*, IV Folge, **4**, (estratto)
- 1901 VOIGT, W., Über das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularer Theorie, *Annalen der Phys.*, IV Folge, **4**, (estratto)
- 1901 WEINGARTEN, G., Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi, *Rend. R. Acc. Lincei*, **10**, ser. V, 1° sem., 57- 60
- 1902 HELMHOLTZ, H. von, *Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen*, Leipzig
- 1902 NATANSON, L., Sur la propagation d'un mouvement dans un fluide visqueux, *Bull. Int. Acad. Sci. de Cracovie*, 19-35
- 1903 DUHEM, P., *L'évolution de la Mécanique*, Paris
- 1903 NATANSON, L., Sur l'application des équations de Lagrange dans la théorie de la viscosité, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 268-283
- 1903 NATANSON, L., Sur l'approximation de certaines équations de la théorie de la viscosité, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 283-311
- 1903 NATANSON, L., Remarques sur la théorie de la relaxation, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 767-787
- 1903 ZAREMBA, S., Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité, *Bull. Int. Acad. Sci. de Cracovie*, 85-93
- 1903 ZAREMBA, S., Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 380-402

- 1903 ZAREMBA, S., Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ces phénomènes, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 403-422
- 1903 ZAREMBA, S., Le principe des mouvements relatifs et les équations de la mécanique physique. Réponse à M. Natanson, *Bull. Acad. Sci. de Cracovie*, 614-621
- 1904 HUBER, M.T., Il lavoro specifico di deformazione come misura dello sforzo del materiale (testo in polacco), *Czasopismo Techniczne* (Periodico tecnico), Lwow; anche *PISMA*, II, Varsavia 1956, 3-20
- 1905 VOLTERRA, V., Un teorema sulla teoria della elasticità, *Rend. R. Acc. Lincei*, **14**, ser. V, 1° sem., 127- 137
- 1905 VOLTERRA, V., Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi, *Rend. R. Acc. Lincei*, **14**, ser. V, 1° sem., 193-202
- 1905 VOLTERRA, V., Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi, *Rend. R. Acc. Lincei*, **14**, ser. V, 1° sem., 351-356
- 1905 VOLTERRA, V., Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici, *Rend. R. Acc. Lincei*, **14**, ser. V, 1° sem., 431-438
- 1905 VOLTERRA, V., Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici, *Rend. R. Acc. Lincei*, **14**, ser. V, 1° sem., 641-654
- 1906 SCOBLE, W.A., The Strength and Behavior of Ductile Materials under Combined Stress, *Phil. Mag.*, **12**, 533-547
- 1905 VOLTERRA, V., Sull'equilibrio dei corpi elastici molteplicemente connessi, *Nuovo Cimento*, (5), X e XI
- 1907 VOLTERRA, V., Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes, *Ann. Ecole Normale*, **24**, 401-517
- 1909 HAAR, A., KÁRMÁN, T. von, Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien, *Nachr. K. Gesell. Wiss. Gö.*, 204-218
- 1909 HAMEL, G., Über die Grundlagen der Mechanik, *Math. Annalen*, **66**, 350-397
- 1909 LUDWIK, P., *Elemente der technologischen Mechanik*, Springer, Berlin
- 1910 SCOBLE, W.A., Ductile materials under combined stress, *Phil. Mag.*, **19**, 6<sup>a</sup>ser., 116-128; 908-916

- 1911 JAUMANN, G., Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Akad. Wiss. Wien Sitzber.*, (II a), **120**, 385-530
- 1913 MISES, R. von, Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand, *Nachr. K. Gesell. Wiss. Gö.*, 582-592
- 1914 FORCHHEIMER, P., *Hydraulik*, Berlin, 1914
- 1914 SOMIGLIANA, C., Sulla teoria delle distorsioni elastiche. Nota I, *Rend. R. Acc. Lincei*, **23**, ser. V, 1° sem., 463-472
- 1915 SOMIGLIANA, C., Sulla teoria delle distorsioni elastiche. Nota II, *Rend. R. Acc. Lincei*, **24**, ser. V, 1° sem., 655-666
- 1917 COLONNETTI, G., Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne, *Rend. R. Acc. Lincei*, **26**, ser. V, 2° sem., 43-47
- 1917 MAGGI, A., Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche, *Rend. Acc. Lincei*, ser. V, **26**, 1°sem., 350-357
- 1918 COLONNETTI, G., Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie, *Rend. Acc. Lincei*, ser. V, **27**, 112-117
- 1918 COLONNETTI, G., Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei, *Rend. Acc. Lincei*, ser. V, **27**, 155-158
- 1918 COLONNETTI, G., Sul problema delle coazioni elastiche, *Rend. Acc. Lincei*, ser. V, **27**, Nota I: 257-270; Nota II: 331-335
- 1918 COLONNETTI, G., Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche, *Atti R. Acc. Sci.*, Torino, **54**, 69-83 (41-55 a seconda della numerazione)
- 1918 JAUMANN, G., Physik der kontinuierlichen Medien, *Denks. Akad. Wiss. Wien*, **95**, 461-562
- 1920 BOUASSE, H., *Théorie de l'élasticité. Résistance des matériaux*, Librairie Delagrave, Paris
- 1920 BRILLOUIN, M., Théorie de la plasticité et de la fragilité des solides isotropes, *Annales Phys.*, 9°ser., **13**, 217-235
- 1920 BRILLOUIN, M., La théorie de Tresca - Saint-Venant, *Annales Phys.*, 9°ser., **14**, 75-112;

- 1920 FÖPPL, A., FÖPPL, L., *Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeits-ehre für Ingenieure*, München
- 1920 HAIGH, B.P., The strain energy function and the elastic limit, *Engineering*, **109**, 158-160
- 1920 PRANDTL, L., Über die Härte plastischer Körper, *Nachr. K. Wiss. Gö.*, 74-85
- 1921 GRIFFITH, A.A., The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. (A)*, **221**, 163-198
- 1921 MISES, R. von, Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **1**, 1-15
- 1921 MISES, R. von, Über die gegenwärtige Krise der Mechanik, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **1**, 425-431
- 1921 PRANDTL, L., Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **1**, 15-28
- 1921 SANDEN, K. von, Die Energiegrenze der Elastizität nach Huber und Haigh im Vergleich zu den älteren Dehnungs- und Schubspannungstheorien, *Werft und Reederei*, **2**, Heft 8, 217-218
- 1922 HONEGGER, E., Das Verhalten mechanisch beanspruchter Metalle, *BBC Mitteilungen*, **9**, 25-35; 223-234
- 1923 HENCKY, H., Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **3**, 241-251
- 1923 PRANDTL, L., Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **3**, 401-406
- 1924 HENCKY, H., Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **4**, 323-334
- 1924 HENCKY, H., Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nebenspannungen, *Proc. 1<sup>st</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Delft), 312-316

- 1924 HEYMANS, P., Note on a property of rectilinear lines of principal stress, *J. Math. and Phys.*, **3**, 182-185
- 1924 SCHMID, E., Yield point of a crystals, critical shear stress law, *Proc. 1<sup>st</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Delft), 342
- 1924 PRANDTL, L., Spannungsverteilung in plastischen Körper, *Proc. 1<sup>st</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Delft), 43-54
- 1925 BRILLOUIN, M., Essai théorique sur la plasticité des solides, *Annales Phys.*, **3**, 10<sup>ser.</sup>, 129-144
- 1925 BRILLOUIN, L., Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valable pour des coordonnées quelconques, *Annales Phys.*, **3**, 10<sup>ser.</sup>, 251-298
- 1925 HENCKY, H., Über das Wesen der plastischen Verformung. II. Das Strömen plastischer Massen und der Arbeitsverlust beim Schmiede- und Walzvorgang, *VDI-Zeits.*, **69**, 695-696; 1253-1254
- 1925 LODÉ, W., Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **5**, 142-145
- 1925 MISES, R. von, Bemerkungen zur Formulierung des mathematischen Problems der Plastizitätstheorie, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **5**, 147-149
- 1925 NADAI, A., Neue Beiträge zum ebenen Problem der Plastizität, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **5**, 141-142
- 1925 SCHLEICHER, F., Die Energiegrenze der Elastizität (Plastizitätsbedingung), *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **5**, 478-479
- 1926 BECKER, R., Über Plastizität, Verfestigung und Rekristallisation, *Zeits. techn. Phys.*, **7**, 547-555
- 1926 BRIDGMAN, P.W., Some Mechanical Properties of Matter under High Pressure, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 53-61;
- 1926 DEBYE, P., Molekulare Kräfte und ihre Deutung, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 33-45
- 1926 ELAM, C.F., Some Properties of Gold, Silver and Copper Crystals, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 258-259

- 1926 GÖLER, F., Festigkeitseigenschaften von Metallkristallen, *Zeits. techn. Phys.*, **8**, 132-141
- 1926 KÁRMÁN, T. von, Über elastische Grenzzustände, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 23-32
- 1926 LODÉ, W., Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel, *Zeits. Phys.*, **36**, 913-939
- 1926 NADAI, A., Versuche über die Fließgrenze des Eisens, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 336-341
- 1926 ONO, A., Zum Gleitwiderstande des Kristalls, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 247-250
- 1926 ROS, M., EICHINGER, A., Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 315-325; 325-327
- 1926 SACHS, G., Beitrag zum Härteproblem, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 266-271
- 1926 SCHLEICHER, F., Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung), *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **6**, 199-216
- 1926 SCHMID, E., Zur quantitativen Beschreibung der plastischen Einkristallendehnung, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 251-257
- 1926 SMEKAL, A., Zur Molekulartheorie der Festigkeit und der Verfestigung, *Zeits. techn. Phys.*, **7**, 535-544
- 1926 TAYLOR, G.I., The Distortion of Single Crystals of Metals, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 46-52
- 1926 WEISSENBERG, K., Die geometrische Strukturtheorie der Materie, *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Zürich), 243-246
- 1927 LOVE, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge
- 1927 NADAI, A., *Der bildsame Zustand der Werkstoffe*, Berlin
- 1928 HENCKY, H., Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen, *Zeits. techn. Phys.*, **9**, 215-220; 457

- 1928 KRALL, G., Limiti superiori del cemento dinamico, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, cl. Sci. Fis. Mat., **7**, 223-228
- 1928 LODÉ, W., Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle, *VDI-Zeits.*, **72**, 733
- 1928 MISES, R. von, Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **8**, 161-185
- 1928 MURNAGHAN, F.D., On the Energy of Deformation of an Elastic Solid, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **14**, 889-891
- 1928 NADAI, A., Plastizität und Erddruck, *Handbuch der Phys.*, VI, 428-50
- 1928 SACHS, G., Zur Ableitung einer Fließbedingung, *VDI-Zeits.*, **72**, 734-736
- 1928 SMEKAL, A., Die molekulartheoretischen Grundlagen der Festigkeitseigenschaften des Werkstoffkornes. Sichtbarmachung molekularer Höchstspannung in verformten Kristallen, *VDI-Zeits.*, **72**, 667-673
- 1928 TAKABA, I., OKUDA, K., Die theorie der Fließfiguren, *Archiv Eisenhüttenwesen*, **1**, 511
- 1929 BURZYNSKI, W. von, Über die Anstrengungshypothesen, *Schweizerische Bauzeitung*, **94**, 259-262
- 1929 HENCKY, H., Das Superpositionsgesetz eines endlich deformierten relaxationsfähigen elastischen Kontinuums und seine Bedeutung für eine exakte Ableitung der Gleichungen für die zähe Flüssigkeit in der Eulerschen Form, *Annalen Phys.*, **2**, 617-629
- 1929 HENCKY, H., Welche Umstände bedingen die Verfestigung bei der bildsamen Verformung von festen isotropen Körpern, *Zeits. Phys.*, **55**, 145-155
- 1929 LICHTENSTEIN, L., *Grundlagen der Hydromechanik*, Berlin
- 1929 REUSS, A., Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **9**, 49-58
- 1930 GEIRINGER-POLLACZEK, H., Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem, *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Stoccolma), 185-190
- 1930 MISES, R. von, Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua, *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Congr. Appl. Mech.* (Stoccolma), 4-11

- 1930 NADAI, A., Zur Theorie plastischer Zustände, *Proc. 3<sup>^</sup>Int. Congr. Appl. Mech.* (Stoccolma), 191-196
- 1930 PERSU, A., Irreführende Anschauungen in den Grundlagen der Mechanik, *Proc. 3<sup>^</sup>Int. Congr. Appl. Mech.* (Stoccolma), 468-47
- 1930 REINER, M., Die Plasticodynamik weicher Stoffe, *Proc. 3<sup>^</sup>Int. Congr. Appl. Mech.* (Stoccolma), 197
- 1930 REUSS, A., Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **10**, 266-274
- 1930 SADOWSKI, M., Das nichtanalytische elastische Potential. Theorie und Beispiele, *Proc. 3<sup>^</sup>Int. Congr. Appl. Mech.* (Stoccolma), 452-454
- 1930 SANDEL, G.D., Die Anstrengungsfrage, *Schweizerische Bauzeitung*, **95**, 335-338
- 1930 SANDEL, G.D., Über die Anstrengungshypothesen, *Schweizerische Bauzeitung*, **95**, 87; 123
- 1930 TAFEL, W., Meine Arbeiten über die plastische Verformung und den Fließverfestigungs- und Bruchvorgang beim Zerreißversuch, *Proc. 3<sup>^</sup>Int. Congr. Appl. Mech.* (Stoccolma), 214-222
- 1931 NADAI, A., *Plasticity*, New York, 1931
- 1931 (2) WEISSENBERG, K., Die Mechanik deformierbarer Körper, *Abh. Akad. Wiss.*, n.2, Berlin
- 1932 (1) EISENSCHITZ, R., Die Viskosität von suspensionen lang-gestreckter Teilchen und ihre Interpretation durch Raumbeanspruchung, *Zeits. physikalische Chemie*, (A), 158, 78-90
- 1932 REUSS, A., Fließpotential oder Gleitebenen ?, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **12**, 1932
- 1932 SCHMIDT, R., Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet, *Ing.-Arch.*, **3**, 215-235
- 1933 FROMM, H., Stoffgesetze des isotropen Kontinuums, insbesondere bei zähplastischem Verhalten, *Ingenieur-Archiv*, **4**, 432-466

- 1933 ODQVIST, F.K.G., Die Verfestigung von flusseisenähnlichen Körpern, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **13**, 360-363
- 1933 PRANDTL, L., Ein Gedankenmodell für den Zerreißvorgang spröde Körper, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **13**, 129-133
- 1933 REUSS, A., Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfließbedingung, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **13**, 356-360
- 1933 THOMPSON, J.H.C., On the theory of visco-elasticity: a thermo-dynamical treatment of visco-elasticity, and some problems of the vibrations of visco-elastic solids, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, (A), **231**, 339-407; 355 e 359 note sulla plasticità
- 1934 CAQUOT, A., Définition du domaine élastique dans les corps isotropes. Courbes intrinsèques de résistance élastique apparente, et de résistance élastique vrai (endurance), *Proc. 4<sup>e</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 24-35
- 1934 FROMM, H., Stoffgesetze des zäh- plastischen, isotropen Kontinuums, *Proc. 4<sup>e</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 182-184
- 1934 JÜRGENSON, L., On application of theories of elasticity and plasticity to foundation problems, *Proc. 4<sup>e</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 199
- 1934 LEON, A., Über die Verbindung von Trenn- und Schubbruch, *Proc. 4<sup>e</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 211
- 1934 OROWAN, E., Zur Kristallplastizität, *Zeits. für Physik*, **89**, Teil I: 605-613; Teil II: 614-633; Teil III: 634-659
- 1934 POLANYI, M., Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte, *Zeits. für Physik*, **89**, 660-664
- 1934 TAYLOR, G.I., The Strength of Crystals of Pure Metals and of Rock Salt, *Proc. 4<sup>e</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 113-125
- 1934 TAYLOR, G.I., The mechanisms of plastic deformation of crystals, *Proc. Roy. Soc. London*, (A), **145**, 362
- 1937 GEIRINGER, H., Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes, *Mémorial des Sciences Math.*, fasc. 86
- 1937 MURNAGHAN, F.D., Finite deformation of an elastic solid, *Amer. J. Math.*, **59**, 235-260

- 1937 PRAGER, W., Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique, *Mémorial des Sciences Math.*, fasc. 87
- 1937 ZAREMBA, S., Sur une conception nouvelle des forces intérieures dans un fluide en mouvement, *Mémorial des Sciences Math.*, fasc. 82
- 1937° PERETTI, G., Dissipazioni di energia nei mezzi plastici, *Rend. Ist. Lom.*, **70**, 93-100
- 1938 BIOT, M.A., Theory of elasticity with large displacements and rotations, *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 117-122
- 1938 COLONNETTI, G., De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels se produisent des déformations plastiques, *J. Math. Pures et Appl.*, ser. IX, **17**, 233-235
- 1938 COLONNETTI, G., De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels se produisent des déformations plastiques, *J. Math. Pures et Appl.*, IX sér., **17**, 233-255
- 1938 CROSS, H., The relation of structural mechanics to structural engineering, *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 1-8
- 1938 KÖRBER, F., Das Verhalten metallischer Werkstoffe im Bereich kleiner Verformungen, *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 20-33
- 1938 MELAN, E., Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, *Ing.-Arch.*, **9**, 116-126
- 1938 PERES, J., Les methodes d'analogie en mécanique appliquée, *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 9-19
- 1938 PRAGER, W., On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state, *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 234-237
- 1938 REINER, M., FREUNDENTHAL, A., Failure of a Material showing Creep (a dynamical theory of strength), *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 228-233;
- 1938 RENDULIC, L., Eine Betrachtung zur Frage der plastischen Grenzzustände, *Der Bauingenieur*, **19**, 913-916
- 1938 TAYLOR, G.I., Plastic Strain in Metals, *J. Inst. Metals*, **62**, 307-324
- 1939 KAPPUS, R., Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **19**, 271-285; 344-361

- 1939 SIGNORINI, A., Valori medi delle caratteristiche dello stress in stereodinamica, *Rend. Acc. Lincei*, **29**, 6<sup>a</sup>ser., 1<sup>a</sup>sem., fasc. 10, (estratto)
- 1941 KOEHLER, J.S., On the Dislocation Theory of Plastic Deformation, *Physical Review*, **60**, 397-410
- 1941 PRAGER, W., A new mathematical theory of plasticity, *Revue Fac. Sci. Istanbul*, (A), **5**, 215-226
- 1941 PRAGER, W., On a analogy between the fundamental equations of hydrodynamics and elastostatics, *Revue Fac. Sci. Istanbul*, (A), **5**, 41-43
- 1941 SETH, B.R., On Guest's law of elastic failure, *Proc. Indian Acad. Sci.*, (A), **14**, 17-40
- 1942 ILYUSHIN, A.A., Relations between the theory of Saint-Venant - Lévy - Mises and the theory of small elastic-plastic deformations, *Prik. Mat. Mekh.*, **9**, 207-218; vedi anche *Appl. Math. and Mech.*, **9**, 1945
- 1942 PRAGER, W., Fundamental theorems of a new mathematical theory of plasticity, *Duke Math. Jour.*, **9**
- 1943 ILYUSHIN, A.A., Some problems on the theory of plastic deformations, *Appl. Math. and Mech.*, **7**, 1943
- 1943 MELDAHL, A., Beitrag zur Anwendung der Bruchhypothese der maximalen Gestaltänderungsarbeit, *Brown Boveri Mitteilungen*, Juli-August 1943, 204
- 1943 SADOWSKY, M.A., A principle of maximum plastic work in classical plasticity, *J. Appl. Mech.*, **65**, A-65
- 1943 SETH, B.R., Consistency equations of finite strain, *Proc. Indian Acad. Sci.*, (A), **29**, 336-339
- 1943 UDESCHINI, P., Sull'energia di deformazione, *Rend. R. Ist. Lom., classe scienze mat. e fis.*, **76**, 25-34
- 1944 SADOWSKY, M.A., On the stress-strain velocity relations in equations of viscous flow, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, (A), **20**, 329-335
- 1944 THOMAS, T.Y., Surfaces of maximum shearing stress, *J. Math. and Phys.*, **23**, 167-172
- 1945 REINER, M., A mathematical theory of dilatancy, *Amer. Jour., Math.*, **67**, 350-362

- 1945 SOKOLOVSKY, W.W., Plastic equilibrium equations of a plane stressed state, *Appl. Math. and Mech.*, **9**, 127-128
- 1945 SOKOLOVSKY, W.W., The theory of plasticity. Outline of work done, *Appl. Math. and Mech.*, **9**, 507
- 1946 BRIDGMAN, P.W., The tensile properties of several special steels and certain other materials under pressure, *J. Appl. Phys.*, **17**, 201-212
- 1946 BRIDGMAN, P.W., The effect of hydrostatic pressure on plastic flow under shearing stress, *J. Appl. Phys.*, **17**, 692-698;
- 1946 GLEYZAL, A., General Stress-Strain Laws of Elasticity and Plasticity, *Trans. ASME*, **68**, A-261 - A-264
- 1946 PASTORI, M., Plasticità, *Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano*, **18**, (estratto)
- 1946 SWIFT, H.W., Plastic strain in isotropic strain-hardening material, *Engineering*, **162**, 381-384
- 1946 VOLTERRA, E., Sur la relation dynamique entre effort et déformation dans les matériaux plastiques, *Congr. Int. Mecc. Appl.*, ?; cit. in Pastori, 1946
- 1947 TORRE, C., Über den plastischen Körper von Prandtl. Zur Theorie der Mohrschen Grenzkurve, *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **1**, 36-50
- 1947 TORRE, C., Einfluß der mittleren Hauptnormalspannung auf die Fließ- und Bruchgrenze, *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **1**, 316-342
- 1947 WEISSENBERG, K., A continuum theory of rheological phenomena, *Nature*, **159**, 310-311
- 1948 HILL, R., A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, **193**, 281
- 1948 PRAGER, W., Discontinuous solutions in the theory of plasticity, in *Studies an Essays presented to R. Courant on his 60 th Birthday*, New York, 289-300
- 1948 PRAGER, W., Plasticity for the aerodynamicist, *J. Aeronautical Sci.*, **15**, (estratto)
- 1948 PRAGER, W., The stress-strain laws of the mathematical theory of plasticity. A survey of recent progress, *Symp. on Flow and Fracture of Metals*, (estratto)
- 1948 REINER, M., Elasticity beyond the elastic limit, *Amer. J. Math.*, **70**, 433-446

- 1948 RICHTER, H., Das isotrope Elastizitätsgesetz, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **28**, 205-209
- 1948 TRUESDELL, C., A new definition of a fluid. I. The stokesian fluid, *Proc. 7<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, **2**, 351-364
- 1948 WINZER, A., CARRIER, G.F., The interaction of discontinuity surfaces in plastic field of stress, \$, (estratto)
- 1949 BATDORF, S.B., BUDIANSKY, B., *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*, National Advisory Committee for Aeronautics-Techn. Note, n. 1871
- 1949 COLONNETTI, G., Elastic equilibrium in the presence of permanent set, *Quart. Appl. Math.*, **7**, 353-362
- 1949 DRUCKER, D.C., Some implications of work hardening and ideal plasticity, *Quarterly Appl. Math.*, **7**, 411-418
- 1949 GREENBERG, H.J., Complementary minimum principles for an elastic-plastic material, *Quarterly Appl. Math.*, **7**, 85-95
- 1949 LEIBFRIED, G., LÜCKE, K., Über das Spannungsfeld einer Versetzung, *Zeits. für Physik*, **126**, 450-464
- 1949 MISES, R. von, Three remarks on the theory of the ideal plastic body, *Reissner Anniversary Volume*, Ann Arbor, Michigan, 415-429
- 1949 NADAI, A.L., Das Fleßen von Metallen unter verschiedenen Beanspruchungen, *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **3**, I Teil, 261-290; II Teil, 421- 445
- 1949 PRAGER, W., Recent developments in the mathematical theory of plasticity, *J. Appl. Phys.*, **20**, 235-241, (estratto)
- 1949 SYMONDS, P.S., Elastic-plastic analysis of structures subjected to loads varying arbitrarily between prescribed limits, \$\$\$, (estratto)
- 1949 TRIFAN, D., A new theory of plastic flow, *Quarterly of Appl. Math.*, **7**, 201-211
- 1950 DRUCKER, D.C., WHITE, G.N., Effective stress and effective strain relation to stress theories of plasticity, *J. Appl. Phys.*, **21**, 1013-1021, (estratto);

- 1950 FREUDENTHAL, A.M., *Inelastic behavior of engineering materials and structures*, New York
- 1950 NADAI, A., *Theory of flow and fracture of solids*, McGraw-Hill, New York, 1950
- 1950 NEAL, B.G., Plastic collapse and shakedown theorems for structures of strain-hardening material, *J. Aeronautical Sci.*, **5**, (estratto)
- 1950 OLDROYD, J.G., On the formulation of rheological equations of state, *Proc. Roy. Soc.*, (A), **200**, 523-541
- 1950 SIGNORINI, A., Un semplice esempio di “incompatibilità” tra l’elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite, *Rend. Accad. Lincei, cl. mat. fis.*, **8**, 276-281
- 1950 STÜSSI, F., Die Grundlagen der mathematischen Plastizitätstheorie und der Versuch, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **1**, 254-267
- 1950 TORRE, C., Die Mechanik der Grenzbeanspruchungen, *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **4**, 93-108
- 1950 TORRE, C., Grenzbedingung für spröden Bruch und plastisches Verhalten bildsamer Metalle, *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **4**, 174-189
- 1951 BIJLAARD, P.P., Die Grundlagen der mathematischen Plastizitätstheorie und der Versuch, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **2**, 114-117
- 1951 DRUCKER, D.C., EDELMAN, F., Some extension of elementary plasticity theory, *J. Franklin Inst.*, **251**, 580-605
- 1951 HILL, R., On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point, *Phil. Mag.*, **42**, 868-875
- 1951 LEIBFRIED, G., DIETZE, H.-D., Versetzungsstrukturen in kubisch-flächenzentrierten Kristallen, *Zeits. für Physik*, **131**, Teil I: 113-129; Teil II: 156-169
- 1951 ONO, A., Strength of materials and practical problems, *Proc. of the 1<sup>st</sup> Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1-4
- 1951 PRAGER, W., HODGE, P.G., *Perfectly elastic solids*, New York
- 1951 PRAGER, W., Recent contributions to the theory of plasticity, *Appl. Mech. Rev.*, 585-588, (estratto)

- 1951 STÜSSI, F., Stellungnahme zur Zuschrift von Prof. P.P. Bijlaard, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **2**, 118-119
- 1951 WHITTAKER, E., *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Nelson and Sons, London; ed. orig., meno ampia, 1910
- 1951 YAMAMOTO, Y., A general theory on the plastic behavior of metals, *Proc. of the 1<sup>st</sup> Japan National Congress for Applied Mechanics*, 93-96
- 1951 YOKOBORI, T., The fatigue of metals from the standpoint of the nucleation theory, *Proc. of the 1<sup>st</sup> Japan National Congress for Applied Mechanics*, 97-100
- 1952 BRIDGMAN, P.W., *Studies in large plastic flow and fracture, with special emphasis on the effects of hydrostatic pressure*, Harvard Univ. Press, 1964 (ed. orig. 1952)
- 1952 HILL, R., A note on estimating yield point loads in a plastic-rigid body, *Phil. Mag.*, **43**, 353-355
- 1952 ISA, T., On plastic deformation, *Proc. of the 2<sup>nd</sup> Japan National Congress for Applied Mechanics*, 49-50
- 1952 KONDO, K., On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding, *Proc. of the 2<sup>nd</sup> Japan National Congress for Applied Mechanics*, 41-47
- 1952 THOMAS, T.Y., On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equations, *Jour. Rat. Mech. An.*, **1**, 343-357
- 1952 TRUESDELL, C., A Program of Physical Research in Classical Mechanics, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **3**, 79-95
- 1952 TRUESDELL, C., The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, *Jour. Rat. Mech. An.*, **1**, 125-300
- 1953 COTTREL, A.H., *Dislocation and plastic flow in crystals*, Oxford
- 1953 KOITER, W.T., Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface, *Quart. Appl. Math.*, **11**, 29-53
- 1953 LEE, E.H., A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation, *Quart. Appl. Math.*, **10**, (estratto)

- 1953 NYE, J.F., Some geometrical relations in dislocated crystals, *Acta Metallurgica*, **1**, 153-162
- 1953 PRAGER, W., On the use of singular yield conditions and associated flow rules, *J. Appl. Mech.*, **20**, 317-320
- 1953 SAUTTER, W., KOCHENDÖRFER, A., DEHLINGER, U., Über die Gesetzmäßigkeiten der plastischen Verformung von Metallen unter einem mehrachsigen Spannungszustand (Dissertation von W. Sautter, TH Stuttgart 1952), *Zeitschr. für Metallkunde*, **44**, I Teil.Theoretische Grundlagen: pp. 442-449; II Teil. Zug- und Torsionsversuche an Hohlzylindern aus Aluminium: pp. 553-565
- 1953 STASSI D'ALIA, F., Origini e sviluppi delle teorie sulla plasticità, *Atti Acc. Sci. lett. Arti Palermo*, **14**, 45-102 (1953-'54)
- 1953 TIMOSHENKO, S., *History of strength of materials*, New York, 1983
- 1953 TRUESDELL, C., Corrections and Additions to "The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics", *Jour. Rat. Mech. An.*, **2**, 593-616;
- 1954 CRAEMER, H., Fallacies and paradoxa in the plasticity theory, *Acta Techn. Acad., Sci. Hungaricae*, **10**, 73-82
- 1954 DRUCKER, D.C., Coulomb friction, Plasticity, and limit loads, *J. Appl. Mech.*, **21**, 71-74
- 1954 DRUCKER, D.C., SHIELD, R.T., The application of limit analysis to punch-indentation problems, *J. Appl. Mech.*, **20**, 453-460
- 1954 ERICKSEN, J.L., Deformations Possible in Every Isotropic, Incompressible, Perfectly Elastic Body, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **5**, 466-489
- 1954 ERICKSEN, J.L., RIVLIN, R.S., Large elastic deformations of homo-geneous anisotropic materials, *Jour. Rat. Mech. An.*, **3**, 281-301
- 1954 GRANDORI GUAGENTI, E., Campi di esistenza delle varietà caratteristiche nei corpi elastoplastici, *Ist. Lom. Sci. Lett.*, 87, (estratto)
- 1954 HERSHEY, A.V., DAHLGREN, V., The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals, *J. Appl. Mech.*, **21**, 241-249
- 1954 OLSZAK, W., Sur les bases de la Théorie des corps élastoplastiques non-homogènes, [testo in polacco con riassunto in francese], *Archiwum Mechaniki*

- Stosowanej*, **6**, parte I: 493-530; parte II: 639-654. Testo inglese in *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **3** (1955), parte I: 45-49; parte II: 111-117
- 1954 SALYI, I., Comments on Prof. H. Craemer's paper: "Fallacies and Paradoxa in the plasticity theory", *Acta Tech. Acad. Sci. Hungaricae*, **10**, 83-88
- 1954 STASSI D'ALIA, F., Origini e sviluppi delle teorie sulla plasticità, *Atti Acc. Sci.*, Palermo, **14**, 1954, 45-102
- 1954 TRUESDELL, C., Rational fluid mechanics (1687-1765), in *L.Euleri Opera Omnia*, II, **12**
- 1955 CAPRIOLI, L., Su un criterio per l'esistenza dell'energia di deformazione, *Boll. Un. Mat. Italiana*, 3<sup>ser.</sup>, **10**, 481-483
- 1955 COLONNETTI, G., *L'équilibre des corps déformables*, Dunod, Parigi
- 1955 NOLL, W., On the continuity of the solid and fluid state, *Jour. Rat. Mech. An.*, **4**, 3-81
- 1955 OLSZAK, W., The plane problem of the theory of plastic flow of non-homogeneous bodies, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **4**, 119-124
- 1955 TRUESDELL, C., Hypo-elasticity, *Jour. Rat. Mech. An.*, **4**, 83-133
- 1955 TRUESDELL, C., The simplest rate theory of pure elasticity, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, **8**, 123-132
- 1956 BIOT, M.A., Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid, *J. Appl. Phys.*, **27**, 459-467
- 1956 BURGERS, J.M., BURGERS, W.G., Dislocations in crystals lattices, in *Rheology*, Eirich, F.R., (Ed.), Cap. VI, New York
- 1956 FINZI, L., Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico, *Rend. Acc. Lincei*, **20**, 205-211; 338-342
- 1956 HILL, R., New Horizons in the mechanics of solids, *J. Mech. and Phys. of Solids*, **5**, 66-74
- 1956 HODGE, P.G. (Jr.), A general theory of piecewise linear plasticity based on maximum shear, *J. Mech. and Phys. of Solids*, **5**, 243-260, (1956-'57)
- 1956 LIANIS, G., FORD, H., An experimental investigation of the yield criterion and the stress-strain law, *J. Mech. and Phys. of Solids*, **5**, 215-222

- 1956 OLSZAK, W., URBANOWSKI, W., The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, **8**, 671-694
- 1956 PRAGER, W., Finite plastic deformation, in *Rheology*, Eirich, F.R., (Ed.), cap. III, New York
- 1956 REINER, M., Phenomenological Macrorheology, in *Rheology*, Eirich, F.R., (Ed.), cap. II, New York
- 1956 THOMAS, T.Y., Deformation energy and stress-strain relations for isotropic materials, *J. Math. and Phys.*, **35**, 335-350
- 1956 TRIFAN, D., Stress theory of plastic flow, *J. Math. and Phys.*, **35**, 44-52
- 1956 TRUESDELL, C., Das ungelöste Hauptproblem der endlichen Elastizitätstheorie, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **36**, 97-103
- 1956 TRUESDELL, C., Hypo-elastic shear, *J. Appl. Phys.*, **27**; pp. 441-447
- 1956 TRUESDELL, C., Zur Geschichte des Begriffes "innere Druck", *Phys. Blätter*, **12**, 315-326
- 1956 VERMA, P.D.S., Hypo-elastic pure flexure, *Proc. Indian Acad. Sci.*, (A), **44**, 185-193
- 1957 OLSZAK, W., URBANOWSKI, W., The generalised distortion energy in the theory of anisotropic bodies, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **4**, 29-37
- 1957 OLSZAK, W., URBANOWSKI, W., The tensor of moduli of plasticity, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **4**, 39-45
- 1957 OLSZAK, W., URBANOWSKI, W., The flow function and the yield condition for non-homogeneous orthotropic bodies, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **4**, 191-203
- 1957 TRUESDELL, C., *Ipoelasticità*, Bari
- 1958 ERICKSEN, J.L., Hypo-elastic potentials, *Quart. J. Mech. and Appl. Mech.*, **11**, 67-72
- 1958 GEIRINGER, H., Ideal Plasticity, *Handb. der Phys.*, **VIa/3**
- 1958 KONDO, K. & YUKI, M., On the Current Viewpoints of Non-Riemannian Theory, in *RAAG Memoirs*, **2**, 202-226

- 1958 KONDO, K., Uncertainty Elements in the Theory of Plasticity Phenomena, *RAAG Memoirs*, **2**, 227-232
- 1958 LIN, T.H., On stress-strain relations based on slips, *Proc. 3<sup>rd</sup> U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 581-587
- 1958 STASSI D'ALIA, F., *Teoria della plasticità e sue applicazioni*, Palermo
- 1959 BUDIANSKY, B., A reassessment of deformation theories of plasticity, *Trans. ASME*, **E26**, 259-264
- 1959 CLAVUOT, C., ZIEGLER, H., Über einige Verfestigungsregeln, *Ing.-Arch.*, **28**, 13-26
- 1959 KRÖNER, E., Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, *Arch. Rat. Mech. An.*, **4**, 273-333
- 1959 PIPKIN, A.C. & RIVLIN, R.S., The formulation of constitutive equations in continuum physics. I, *Arch. Rat. Mech. An.*, **4**, 129-144
- 1959 RIVLIN, R.S., The formulation of constitutive equations in continuum physics, II, *Arch. Rat. Mech. An.*, **4**, 262-272
- 1959 TRUESDELL, C., The rational mechanics of materials. Past, Present, Future, *Appl. Mech. Rev.*, **12**, 75-80
- 1960 BERNSTEIN, B., Hypoelasticity and elasticity, *Arch. Rat. Mech. An.*, **6**, 89-104
- 1960 DRUCKER, D.C., Extension of the stability postulate with emphasis on temperature changes, *Plasticity. Proc. 2<sup>nd</sup> Symp. on Naval Structural Mechanics*, 170-184
- 1960 HU, L.W., Plastic stress-strain relations and hydrostatic stress, *Plasticity. Proc. 2<sup>nd</sup> Symp. on Naval Structural Mechanics*, 194-201
- 1960 KRÖNER, E., General continuum theory of dislocations and initial stress, *Arch. Rat. Mech. An.*, **4**, 273-334
- 1960 NAGHDI, P.M., Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity, *Plasticity. Proc. 2<sup>nd</sup> Symp. on Naval Structural Mechanics*, 121-167
- 1960 TRUESDELL, C., The rational mechanics of flexible or elastic bodies (1638-1788), in *L.Eulerii Opera Omnia*, (2), **11/2**, Zürich

- 1960 TRUESDELL, C., A program toward rediscovering the rational mechanics of the age of reason, *Arch.Hist.Ex.Sci.*, **1**, 3-36
- 1960 TRUESDELL, C., Modern theories of materials, *Trans. Soc. Rheol.*, **4**, 9-22
- 1960 WEGNER, U., Allgemeine Elastizitätsgesetze, *Der Stahlbau*, **29**, 265-268
- 1961 COLEMAN, B.D., NOLL, W., Foundations of linear visco-elasticity, *Reviews modern Phys.*, **33**, 239-249
- 1961 KRÖNER, E., Zur plastischen Verformung des Vielkristalls, *Acta Metallurgica*, **9**, 155-161
- 1961 PHILLIPS, A., GRAY, G.A., Experimental investigation of corners in the yield surface, *Journ. bas. Engng.*, **83**, 275
- 1961 PRAGER, W., Einführung in die Kontinuumsmechanik, Basel-Stuttgart
- 1961 THOMAS, T.Y., *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, New York
- 1961 WEGNER, U., Allgemeine Elastizitätsgesetze, *Der Stahlbau*, **30**, 321-328
- 1962 DRUCKER, D.C., Survey on second-order plasticity, *Proc. Symp. "Second-order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics"*, Haifa, 416-423
- 1962 DRUCKER, D.C., Stress-strain-time relations and irreversible thermodynamics, *Proc. Symp. "Second-order effects in elasticity..."*, Haifa, 351-350
- 1962 DRUCKER, D.C., On the role of experiment in the development of theory, *Proc. 4<sup>th</sup> U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, **1**, 15-33
- 1962 YOSHIMURA, Y., TAKENAKA, Y., Strain history effects in plastic deformation of metals, *Proc. Symp. "Second-order effects in elasticity..."*, Haifa, 729-750
- 1962 KRÖNER, E., Dislocations and Continuum Mechanics, *Appl. Mech. Rev.*, **15**, 599-606
- 1962 NEMENYI, P.F., The main concepts and ideas of fluid dynamics in their historical development, *Arch.Hist.Ex.Sci.*, **2**, 52-86; (1962-'66)
- 1962 TRUESDELL, C., Rückwirkungen der Geschichte der Mechanik auf Die moderne Forschung, *Humanismus und Technik*, **13**, 1-25; tradotto da *Essays*

*in the History of Mechanics*, Springer 1968 (il lavoro originale risale al 1962: cfr. *Proc. 4<sup>th</sup> U.S. Nat. Congr. Appl Mech.*, 35-47)

- 1962 TRUESDELL, C., Second-order effects in the mechanics of materials, *Proc. Symp. "Second-order effects in elasticity..."*, Haifa , 1-47
- 1963 ERINGEN, A.C., An international journal of engineering science, *Int. J. Engng Sci.*, **1**, 1-3
- 1963 FINZI, L., Sulle equazioni costitutive nella meccanica dei continui, *Ist. Lom. (Rend. Sci.)*, A **97**, 644-649
- 1963 HU, L.W., PAE, K.D., Inclusion of the hydrostatic stress component in formulation of the yield condition, *J. Franklin Institute*, **275**, 491-502
- 1963 KRÖNER, E., Dislocation: a new concept in the continuum theory of plasticity, *J. Math. and Phys.*, **42**, 27-37
- 1963 OLSZAK, W., MROZ, Z., PERZYNA, P., *Recent trends in the development of the theory of plasticity*, Pergamon Press, Oxford-Varsavia
- 1963 SZCZEPINSKI, W., On the effect of plastic deformation on the yield condition, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **11**, 463-468
- 1963 VERMA, P.D.S., SINHA, S.B., A few examples showing use of hypoelasticity in plasticity, *Proc. Nat. Acad. Sci., India*, **33**, 101-106
- 1963 ZAHORSKI, S., Hypoelastic stability in the case of simple extension, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **11**, 455-461
- 1963 ZHONG-HENG, G., On the constitutive equation of hypoelasticity, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **11**, 301-304
- 1963 ZHONG-HENG, G., Some notes on Hypoelasticity, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, **15**, 683-689
- 1963 ZHONG-HENG, G., Time derivatives of tensor fields in non-linear continuum mechanics, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, **15**, 131-161
- 1964 DRUCKER, D.C., On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, *Journ. de Mécanique*, **3**, 235-249
- 1964 ERINGEN, A.C., SUHUBI, E.S., Nonlinear theory of simple micro-elastic solids, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, part I: 189-203; part II: 389-404

- 1964 KONDO, K., On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by differential geometry of continua, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 219-251
- 1965 COLEMAN, B.D., Simple liquid crystals, *Arch. Rat. Mech. An.*, **20**, 40
- 1965 COURBON, J., *Résistance des Matériaux*, Dunod, Paris
- 1965 CRAGGS, J.W., The use of first order differential equations as constitutive equations in the theory of plasticity, *Int. J. Engng Sci.*, **3**, 9-19
- 1965 GREEN, A.E., NAGHDI, P.M., A comment on Drucker's postulate in the theory of plasticity, *Acta Mechanica*, **1**, 334-338
- 1965 GREEN, A.E., NAGHDI, P.M., A general theory of an elastic-plastic continuum, *Arch. Rat. Mech. An.*, **18**, 251-281; corrigenda in **19**
- 1965 LEIPHOLZ, H., Über den Zusammenhang zwischen Fließgesetz und Fließbedingung, *Ing.-Arch.*, **34**, 194-197
- 1965 MANDEL, J., Généralisation de la théorie de plasticité de Koiter, *Int. J. Solids and Structures*, **1**, 273-295
- 1965 PHILLIPS, A., SIERAKOWSKI, R.L., On the concept of the yield surface, *Acta Mechanica*, **1**, 29-35
- 1965 PIPKIN, A.C., RIVLIN, S., Mechanics of Rate-Independent Materials, *ZAMP*, **16**, 313-327
- 1965 TRUESDELL, C., NOLL, W., The non-linear field theories of mechanics, in *Handbuch der Physik*, **III/3**
- 1965 WANG, C.-C., A general theory of subfluids, *Arch. Rat. Mech. An.*, **20**, 1
- 1966 GREEN, A.E., NAGHDI, P.M., A thermodynamical development of elastic-plastic continua, *Proc. IUTAM Symp. "Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids"*, Vienna, 117-131
- 1966 JUSTUSSON, J.W., PHILLIPS, A., Stability and Convexity in Plasticity, *Acta Mechanica*, **2**, 251-267
- 1966 LIN, T.H., ITO, M., Theoretical plastic stress-strain relationship of a polycrystal and the comparisons with the von Mises and the Tresca plasticity theories, *Int. J. Engin. Sci.*, **4**, 543-561

- 1966 MORGAN, A.J.A., Some properties of media defined by constitutive equations in implicit form, *Int. J. Engng Sci.*, **4**, 155-178
- 1966 THOMAS, A.G., Physical Basis of Yield and Fracture, *Conf. Proc. Oxford, Institute of Physics*, London, 134-?; cit. in IUTAM, 1982, "Finite Elasticity"
- 1966 TRUESDELL, C., *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*, Springer
- 1966 UHLHORN, U., Thermomechanics of a continuous system with internal structure, *Proc. IUTAM Symp. "Irreversible aspects..."*, Vienna, 390-393
- 1966 VARLEY, E., DAY, A., Equilibrium Phases of Elastic Materials at Uniform Temperature and Pressure, *Arch. Rat. Mech. An.*, **22**, 253-269
- 1967 CAPURSO, M., Yield conditions for incompressible isotropic and orthotropic materials with different yield stress in tension and compression, *Meccanica*, **2**, 118-125
- 1967 DILLON, O.W., A thermodynamic basis of plasticity, *Acta Mechanica*, **3**, 182-195
- 1967 LE BOITEUX, H., Sur un critère énergétique de limite élastique, *Comptes Rendus*, **265**, (A), 238-239
- 1967 MAIR, W.M., An investigation into the existence of corners on the yield surface, *J. of Strain Analysis*, **2**, 188-195
- 1967 RECKLING, K.-A., *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*, Springer
- 1967 SPENCER, B.J., Boscovich's theory and its relation to Faraday's researches: an analytic approach, *Arch.Hist.Ex.Sci.*, **4**, 184-202,
- 1967 ZIEGLER, H., MC VEAN, D., On the notion of an elastic solid, *Recent Progress in Appl. Mech.*, F.Odquist Volume, Stoccolma
- 1968 BENVENUTO, E., CORSANEGO, A., Formulazione duale di un criterio di stabilità dell'equilibrio, *Atti Ist. Sci. Costr. Genova*, **3**, 19-26
- 1968 LEHMANN, T., THERMANN, K., Grundlagen der Plastizitätstheorie und ihre Anwendungen, *VDI-Zeits.*, **110**, 1491-1499
- 1968 ODQVIST, F.K.G., Non-linear solid mechanics, past, present and future, *Proc. 12<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, 77-99

- 1968 SHOEMAKER, E.M., Some paradoxes associated with elastic-plastic limit load analysis, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, **20**, 473-482
- 1968 TRUESDELL, C., *Essays in the History of Mechanics*, Springer, New York
- 1969 AUGUSTI, G., MARTIN, J.B., PRAGER, W., On the decomposition of stress and strain tensors into spherical and deviatoric parts, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **63**, 239-288
- 1969 BEATTY, M.F., A Theory of Elastic Stability for Perfectly Elastic Materials with Couple-stresses, *Proc. IUTAM "Instability of continuous Systems"*, 85-89
- 1969 CHRISTOFFERSEN, J., Equilibrium and Stability of Elastic-plastic Bodies, *Proc. IUTAM "Instability of continuous Systems"*, 317-328
- 1969 FOX, N., On the derivation of the constitutive equations of ideal plasticity, *Acta Mech.*, **7**, 248-251
- 1969 KONDO, K., On the Riemannian and Non-Riemannian Constructions of the Variational Criteria for Plastic Disturbances and the Standpoint of the Theory of Yielding and Dual Yielding, *Jour. of the Faculty of Engineering, University of Tokyo (B)*, **30**, n. 2, 73-1
- 1969 MORARU, D., Essai sur une theorie thermodynamique des processus irreversibles de deformation, *Atti Ist. Sci. Costr. Genova*, **3**, 1-18
- 1969 MORRIS, G.A., FENVES, S.J., Approximate yield surface equations, *Jour. engineering mechanics division* (Proc. ASCE), August 1969, pp. 937-954
- 1969 STORAKERS, B., Stability Conditions of Rigid-plastic Solids with Extension to Visco-plasticity, *Proc. IUTAM "Instability of continuous Systems,"* 266-271
- 1970 DRUCKER, D.C., RICE, J.R., Plastic deformation in brittle and ductile fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, **1**, 577-602
- 1970 HILL, R., Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain, *Proc. Roy. Soc. London, (A)*, **314**, 457
- 1970 OWEN, D.R., A Mechanical Theory of Materials with Elastic Range, *Arch. Rat. Mech. An.*, **37**, 85-110
- 1970 SAYIR, M., Zur Fliessbendingung der Plastizitätstheorie, *Ing.-Arch.*, **39**, 414-432

- 1970 VALANIS, K.C., On the thermodynamical foundation of classical plasticity, *Acta Mech.*, **9**, 278
- 1971 CAPURSO, M., SACCHI, G., Una condizione di plasticità per solidi anisotropi, *I<sup>o</sup> Congr. AIMETA*, **2**, Udine, 339-355
- 1971 CATTANEO, C., Saggio di una teoria relativistica dell'elasticità, *I<sup>o</sup> Congr. AIMETA*, **1**, Udine, 173-219
- 1971 EISENBERG, M.A., PHILLIPS, A., A Theory of Plasticity with Non-Coincident Yield and Loading Surfaces, *Acta Mechanica*, **11**, 247-260
- 1971 HAHN, H.G., Die linear-elastische Bruchmechanik, *VDI-Zeits.*, **113**, 43-47
- 1971 KONDO, K., Reconstruction of the theory of Yielding with Special Reference to its Crucial Points and its Relation to the Theory of Cosserat Continua, *RAAG Research Notes*, III ser. n. 168, 1-63
- 1971 KONDO, K., A Compendium of the Foundation of the Theory of Yielding in Terms of an Osculation Picture of Finsler Space, *Post-RAAG Research Notes and Memoranda*, n. 22, 1-12
- 1971 LEHMANN, T., THERMANN, K., Grundlagender Plastizitätstheorie und ihrer Anwendungen, *VDI-Zeits.*, **113**, 1169-1183
- 1971 VALANIS, K.C., A theory of viscoplasticity without a yield surface, *Archives of Mechanics*, **23**; parte I, 'General Theory': pp. 517-533; parte II, 'Application to mechanical behavior of metals': pp. 535-551
- 1972 ANDREUSSI, F., PODIO GUIDUGLI, P., An axiomatic approach to the theory of themomechanically constrained materials, *Plasticity today*, 359-364
- 1972 BALDACCI, R., CAPURRO, M., DADDI, I., A glance forward in solid mechanics, *Atti Ist. Sci. Costr. Genova*, **5**, ?; 1971-'72
- 1972 BELL, J., The experimental foundations of solid mechanics, *H.d.P.*, VIa/1
- 1972 BEREZHNOI, I.A., IVLEV, D.D., TCHADOV, V.B., On constructing models of cohesionless media by specifying the dissipation function, *Foundations of Plasticity* (Varsavia 1972), 601-605
- 1972 BERG, C.A., Construction of the equivalent plastic strain increment, *Studies in Applied Mathematics*, **51**, 311-316
- 1972 BETTEN, J., Eine Bemerkung zum Potentialbegriff in der Plasto-mechanik, *Arch. für das Eisenhüttenwesen*, **43**, 471-473

- 1972 FUNG, P.K., BURNS, D.J., LIND, N.C., Yield under high hydrostatic pressure, *Foundations of Plasticity* (Varsavia 1972), 287-299
- 1972 HECKER, S.S., Experimental investigation of corners in the yield surface, *Acta Mechanica*, **13**, 69-86
- 1972 KÖNIG, J.A., On shakedown criteria, *Plasticity today*, 408-412
- 1972 NIKOLAEVSKII, V.N., Continuum theory of plastic deformation of granular media, *Foundations of Plasticity* (Varsavia 1972), 587-600
- 1972 NOLL, W., A New Mathematical Theory of Simple Materials, (Dedicated to Clifford Truesdell, friend and mentor of the author), *Arch. Rat. Mech. An.*, **48**, 1-50
- 1972 PHILIPS, A., Experimental plasticity. Some thoughts on its present status and possible future trends, *Plasticity today*, 193-231
- 1972 PRAGER, W., Limit analysis: the development of a concept, *Problems of Plasticity* (Varsavia 1972), 3-24
- 1972 SETH, B.R., Elastic-plastic transition, *Plasticity today*, 440-443
- 1972 VALANIS, K.C., *Irreversible thermodynamic of continuous media*, Springer
- 1972 VALANIS, K.C., Observed plastic behavior of metals vis-a-vis the endochronic theory of plasticity, *Foundations of Plasticity* (Varsavia 1972), 235-255
- 1973 BELL, J. F., The experimental foundations of solid mechanics, *Handbuch der Physik*, **6a/I**, *Festkörpermechanik I*, Springer
- 1973 GREEN, A.E., NAGHDI, P.M., Rate-type constitutive equations and elastic-plastic materials, *Int. J. Engng Sci.*, **11**, 725-734
- 1973 MAIER, G., DRUCKER, D.C., Effects of Geometry Change on Essential Features of Inelastic Behavior, *Jour. of the engineering mechanics division*, (Proc. ASCE), August 1973, pp. 819-834
- 1973 MAITRA, M., MAJUMDAR, K., Unified plastic yield criterion for ductile solids, *AIAA J.* (American Inst. Aeronautics and Astronautics), **11**, 1428-1429
- 1973 SHRIVASTAVA, H.P., MROZ, Z., DUBEY, R.N., Yield criterion and second-order effects in plane-stress, *Acta Mechanica*, **17**, 137-143

- 1973 ZYCKOWSKI, M., On the accuracy of approximations of the Huber yield condition, *Archives of Mechanics* (Archiwum Mechaniki Stosowanej), **26**, 65-79
- 1974 BALDACCI, R., CAPURRO, M., DADDI, I., Il microuniverso delle dislocazioni, *II Congr. AIMETA*, Napoli
- 1974 BALDACCI, R., CERADINI, G., GIANGRECO, *Plasticità*, Cisia
- 1974 COWIN, S.C., Constitutive relations that imply a generalized Mohr-Coulomb criterion, *Acta Mech.*, **20**, 41-46
- 1974 KLEIBER, M., Objective formulation of rate-type constitutive equations for elastic-ideally plastic solids, *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, **22**, 37-42
- 1974 LARSEN, P.K., POPOV, E.P., A note on incremental equilibrium equations and approximate constitutive relations in large inelastic deformations, *Acta Mech.*, **19**, 1-14
- 1974 OGDEN, R.W., On isotropic tensors and elastic moduli, *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, **75**, 427-436
- 1974 PHILLIPS, A., TANG, J.-L., RICCIUTI, M., Some new observations on yield surfaces, *Acta Mech.*, **20**, 23-39;
- 1974 REINER, M., TAKSERMAN-KROZER, R., Second order stresses in classical elasticity, *Acta Mech.*, **19**, 305-308
- 1974 SZABO, I., Die Geschichte der Materialkonstanten der linearen Elastizitätstheorie homogener isotroper Stoffe, *Die Bautechnik*, **51**, 1-8
- 1974 TOKUOKA, T., Three-dimensional failure of isotropic materials with memory, *Acta Mech.*, **19**, 289-295
- 1975 DEL PIERO, G., On a mathematical theory of elastic-plastic materials, *Archives of Mechanics* (Archiwum Mech. Stosow.), **27**, 253-271
- 1975 HILL, R., On the elasticity of stability of perfect crystals at finite strain, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **77**, 225-240
- 1975 MARTIN, J.B., *Plasticity: Fundamentals and General Results*, London
- 1976 LLORENS, R.E., A hyperbolic theory of plasticity, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **11**, 285-294

- 1976 MICHNO, M.J., FINDLEY, W.N., An historical perspective of yield surface investigation for metals, *Int. J., Non-Linear Mech.*, **11**, 59-82
- 1976 SILHAVY, M., On Transformation Laws for Plastic Deformations of Materials with Elastic Range, *ARMA*, **63**, 1976/77, 169-182
- 1976 TRUESDELL, C., History of Classical Mechanics, *Die Naturwissenschaften*, **63**; Part I, to 1800: pp. 53-62; Part II, the 19th and 20th Centuries: pp. 119-130
- 1978 CAPURRO, M., *Per una interpretazione strutturale della teoria della plasticità*, pubbl. 18, ser. IV, Univ. Genova, Ist. Sci. Costruz.
- 1978 IANNELLI, V., VIVANET, C., Random elastoplastic continua subjected to hydrostatic pressure, *AIMETA*, Firenze, **2**, 297-311
- 1978 MANDEL, J., *Propriétés mécaniques des matériaux. Rhéologie-Plasticité*, Paris
- 1979 AUGUSTI, V., BALDACCI, R., CAPURRO, M., A micro-relativistic dislocation theory, *Mem. Acc. Naz. Lincei*, sez. VIII, **15**
- 1979 BELL, J.F., A Physical Basis for Continuum Theories of Finite Strain Plasticity: Part I, (Dedicated to Clifford Truesdell on his sixtieth birthday), *ARMA*, **70**, 319-338
- 1979 FOSDICK, R.L., SERRIN, J., On the impossibility of linear Cauchy and Piola-Kirchhoff constitutive theories for stress in solids, *Journal of Elasticity*, **9**, 83-89
- 1979 IRVINE, H.M., The stability of the roman arch, *Int. J. Sci.*, **21**, 467-475
- 1979 MARTINS L.C., PODIO-GUIDUGLI, P., A variational approach to the polar decomposition theorem, *Rendiconti Acc. Lincei*, cl. sci. fis. mat. nat., **66**, sez. 1, 487-493;
- 1979 MASSONET, C. & OLSZAK, W. & PHILLIPS, A., *Plasticity in structural engineering. Fundamentals and Applications*, Springer-Verlag, Wien-New York
- 1980 BALDACCI, R., Plasticità fenomenologica e strutturale, in *Memorie Scientifiche di R.Baldacci*, 437-453
- 1980 BELL, J.F., A Physical Basis for Continuum Theories of Finite Strain Plasticity: Part II, *Arch. Rat. Mech. An.*, **75**, 103-126

- 1980 BERGANDER, H., Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **60**, 509-519
- 1980 CAPURRO, M., I mezzi continui e il loro controllo fisico, *5<sup>a</sup> Congr. AIMETA*, Palermo, 57-67
- 1980 HOPKINS, H.G., Prof. William Prager (23 May 1903 - 17 March 1980). Obituary, *Int. J. Mech. Sci.*, **22**, 393-394
- 1980 HUTCHINSON, J.W., NEALE, K.W., Finite Strain J<sub>2</sub> deformation theory, *Proc. IUTAM Symp. "On finite elasticity"*, USA, 237-247
- 1980 SHAW, M.C., A new mechanism of plastic flow, *Int. J. Mech. Sci.*, **22**, 673-686
- 1980 TRUESDELL, C., Sketch for a history of constitutive relations, *Proc. Int. Congr. Rheology* (Naples, Sept. 1-5, 1980), **1**, 1-27
- 1980 ZASLAVSKI, A., On the limitations of the shearing stress formula, *Int. J. Mechanical Engng Education*, **8**, 343-349
- 1983 BELL, J.F., Continuum Plasticity at Finite Strain for Stress Paths of Arbitrary Composition and Direction, *Arch. Rat. Mech. An.*, **84**, 139-170
- 1983 HEYMAN, J., The development of plastic theory 1936-1948: some notes for a historical sketch, in *Instability...*, *Proc. of the M.R.Horne Conf.*, 1-18
- 1983 MORRIS, L.J., (Ed.), *Instability and plastic collapse of steel structures*, *Proc. of the M.R.Horne Conference*, Ed. Granada
- 1983 VALANIS, K.C., FAN, J., Experimental verification of endochronic plasticity in spatially varying strain fields, *Plasticity today*, 153-174
- 1983 ZAOU, A., Macroscopic plastic behaviour of microinhomogeneous materials, *Plasticity today*, 451-469
- 1984 FICHERA, G., The italian contribution to the mathematical theory of elasticity, *Meccanica*, **19**, 259-268
- 1984 CERADINI, G., Sviluppi ed implicazioni strutturali della teoria della plasticità, *AIMETA*, Trieste, dattiloscritto
- 1984 SAWCZUK, A., BIANCHI, G., (Edd.), *Plasticity today*, Elsevier, London

- 1986 DI PASQUALE, S., Questioni concernenti la meccanica delle murature. Storia e prospettive, in AAVV, *Architettura e terremoti. Il caso di Parma; 9 novembre 1983*, Bologna
- 1986 KRÖNER, E., The continuized crystal. A bridge between micro- and macromechanics?, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **66**, T 284-T292
- 1987 CHAKRABARTY, J., *Theory of plasticity*, New York
- 1987 LEHMANN, T., Phänomenologische Plastizitätstheorie, ihre Grundlagen und Methoden, *Naturwissenschaften*, **74**, 225-234
- 1987 NEALE, K.W., Plastic instability phenomena and material formability, *Developments in Engineering Mechanics* (Ed. A.P.S. Selvadurai) Elsevier, Amsterdam, 159-167
- 1987 TRUESDELL, C., *Great scientists of old as heretics in "The scientific method"*, Univ. Press Virginia
- 1988 CASEY, J., NAGHDI, P.M., On the Relationship between the Eulerian and Lagrangian Descriptions of Finite Rigid Plasticity, *Arch. Rat. Mech. An.*, **102**, 351-375
- 1988 CHARRIER, P., DACOROGNA, B., HANOUZET, B., LABORDE, P., An existence theorem for slightly compressible materials in nonlinear elasticity, *SIAM Journ. Mathematical Analysis*, **19**, 70-85
- 1988 CHIPOT, M., KINDERLEHRER, D., Equilibrium Configurations of Crystals, *Arch. Rat. Mech. An.*, **103**, 237-277
- 1988 LUCCHESI, M., PODIO-GUIDUGLI, P., Materials with Elastic Range: A Theory with a View toward Applications. Part I, *Arch. Rat. Mech. An.*, **102**, 23-43
- 1988 LUCCHESI, M., PODIO-GUIDUGLI, P., Sull'equivalenza di alcuni postulati di dissipazione in teoria classica della plasticità, *Atti Congr. AIMETA 1988*, 121-124
- 1988 PODIO-GUIDUGLI, P., Il criterio di snervamento della sottoenergia, in *Omaggio a G. Ceradini*, Univ. Roma "La Sapienza", 559-568
- 1989 DAHAN DALMEDICO, A., La notion de pression: de la méta-physique aux diverses mathématisations. Causalité et statut des Hypothèses, *Revue Hist. Sci.*, **42**, 79-108

- 1989 LAGOUDAS, D.C., A gauge theory of defects in media with microstructure, *Int. J. Engng Sci.*, **27**, 237-249
- 1989 PAGLIETTI, A., Thermodynamic nature and control of the elastic limit in solids, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **24**, 571-583
- 1990 GRATTAN-GUINNESS, I., *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Basel-Boston-Berlin
- 1990 KRÖNER, E., The differential geometry of elementary point and line defects in Bravais crystals, *Int. J. Theor. Phys.*, **29**, 1219-1237
- 1990 KRÖNER, E., Threedimensional stress functions in anisotropic elasticity, *Rend. di Mat., serie VII*, 10, 773-784
- 1990 LUBLINER, J., *Plasticity theory*, New York
- 1990 LUCCHESI, M., PODIO-GUIDUGLI, P., Equivalent Dissipation Postulates in Classical Plasticity, *Meccanica*, **25**, 26-31
- 1991 BELL, J.F., The late-twentieth century resolution of a mid-nine-teenth century dilemma generated by the eighteenth-century experiments of Ernst Chladni on the dynamics of rods, *Arch.Hist.Ex.Sci.*, **43**, 259-273
- 1991 LUCCHESI, M., SILHAVY, M., Ilyushin's Conditions in Non-Isothermal Plasticity, *Arch. Rat. Mech. An.*, **113**, 121-163
- 1991 PODIO-GUIDUGLI, P., VERGARA CAFFARELLI, G., Extreme Elastic Deformations, *Arch. Rat. Mech. An.*, **115**, 311-328
- 1992 ANGELI, P., PAGLIETTI, A., Superficie plastica alla von Mises: la sola possibile per materiali elastici lineari, *Atti IX Congr. AIMETA*, 23-28
- 1992 CASEY, J., The principle of rigidification, *Arch.Hist.Ex.Sci.*, **43**, 329-383
- 1992 CROSLAND, M., *Science under Control. The French Academy of Sciences. 1795-1914*, Cambridge
- 1992 DAHAN DALMEDICO, A., *Mathématisations. A.-L. Cauchy et l'École Française*, Paris
- 1992 PAGLIETTI, A., PORCU, M.C., Stabilità dei materiali elasto-plastici al limite elastico. Aspetti geometrici, *Atti IX Congr. AIMETA*, 437-442

- 1992 PODIO-GUIDUGLI, P., GURTIN, E., On the formulation of mechanical balance laws for structured continua, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **43**, 181-190
- 1992 RENCONTRE, L.J., BIRD, W.W., MARTIN, J.B., Internal variable formulation of a backward difference corrector algorithm for piecewise linear yield surfaces, *Meccanica*, **27**, 13-24
- 1992 TRUESDELL, C., Cauchy and the modern mechanics of continua, *Revue Hist. Sci.*, **45**, 5-24
- 1993 KRÖNER, E., Theory of crystal defects and their impact on material behaviour, in *Modelling of defects and fracture mechanics* (G.Herrmann, Editor), Springer Verlag, 62-117
- 1993 MARTIN, J.B., REDDY, B.D., Piecewise smooth dissipation and yield functions in plasticity, *Meccanica*, **28**, 169-175