ALBERTO CASTIGLIANO

SELECTA 1984

A CURA DI

EDOARDO BENVENUTO

E

VITTORIO NASCE'

EDITRICE LEVROTTO BELLA

C.SO VITTORIO EMANUELE 26

TORINO

RADICI STORICHE E PRESUPPOSTI CRITICI DELL'OPERA DI ALBERTO CASTIGLIANO

di

Edoardo Benvenuto *

È probabile che i concittadini di Conradin Kreutzer siano rimasti un poco smarriti ascoltando il «discorso di commemorazione» tenuto da Martin Heidegger nel 1955 a Meßkirch in occasione del 175° anniversario della nascita del compositore. «Gli strumentisti e i cantanti che animano la festa odierna — disse quella volta Heidegger — sono per voi la testimonianza che l'opera di Conradin Kreutzer è oggi giunta nuovamente al suono. Ma basta questo perché la festa *(Feier)* possa esser detta una commemorazione *(Gedenk-Feier)*? Una commemorazione è infatti un'occasione per rivolgere il pensiero a colui che commemoriamo, e dunque per pensare *(denken)* ...». Heidegger intese appunto mutar la celebrazione in pensiero, l'*Andenken* in *Durchdenken*: e così, anziché commemorare Kreutzer, non ne parlò affatto e volse il discorso su abissali domande filosofiche quasi del tutto estranee alla leggiadra musica del compositore di Meßkirch.

Ebbene, temo che un analogo smarrimento possa derivare dalla lettura di queste pagine scritte in onore di A. Castigliano. Dei celebri teoremi sull'equilibrio dei sistemi elastici ai quali è ormai saldamente congiunto il nome dell'ingegnere astigiano non darò che un cenno sommario e neppure mi soffermerò sull'importanza e l'originalità dell'intera opera compiuta da Castigliano nella sua breve vita. D'altra parte, la ristampa anastatica di alcuni tra gli scritti suoi più significativi offre tangibile testimonianza della rigorosa e ricca sintesi da lui realizzata tra teoria e pratica, tra scienza e tecnica, confermando vieppiù il bel giudizio di S. Timoshenko sulla *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*: «Looking through all these applications, it is easy to see that little has been added to this branch of the theory of structures since Castigliano wrote his famous

* *Professore Ordinario di Scienza delle Costruzioni nell'Università di Genova.*

book» [1]. Vorrei invece tentar anch'io il difficile cammino di Heidegger — seppur in tutt'altro contesto e con esiti ben più umili — per mutare la commemorazione in riflessione storico-critica e capir meglio il significato dell'intervento di Castigliano al termine di una lunga e combattuta diatriba scientifica che per quasi un secolo fu sorgente di ipotesi persuasive e di ancor più persuasive contestazioni, di intuizioni feconde benché fallaci e di verdetti ineccepibili benché sterili, di itinerari divergenti e di inattesi incontri; sinché d'improvviso venne la stagione propizia in cui la medesima idea, l'idea vittoriosa, apparve in più luoghi nel medesimo tempo, come se vagasse nell'aria in attesa d'essere captata.

Qualcosa d'analogo s'era verificato — come osserva K. Pearson [2] — a proposito di un altro famoso problema di meccanica strutturale, quello dei solidi d'uguale resistenza che affaticò un buon numero di scienziati tra la metà del '600 e la metà del '700. In entrambi i casi l'Italia offerse terreno fertile alle polemiche e al fervore quasi passionale della ricerca, dove si univano sublimi intenzioni metafisiche e umanissime ambizioni personali o di scuola. Ma la disputa post-galileiana sui solidi d'ugual resistenza non nascondeva, in realtà, alcunché di inquietante: si trattava soltanto di chiarire i termini del problema, riconoscendo infine che ognuna delle fazioni in lotta s'era guadagnata una parte di verità rispetto a domande e a obiettivi diversi, inizialmente mischiati.

Invece la seconda disputa sulla quale dobbiamo ora soffermarci è di tutt'altro tenore. Sotto l'apparente banalità di un comune esercizio per la determinazione delle reazioni che sorgono quando un corpo poggia su un piano in più di tre punti non allineati o in più di due punti allineati, erano nascosti problemi così oscuri da coinvolgere i principi più saldi della metafisica classica, costringendo a riflettere sui concetti fondamentali della statica e della meccanica. Seguendo il corso della vicenda, esaminando l'alternarsi delle soluzioni contrassegnate da linguaggi e riferimenti mutevoli, lo storico è indotto a tracciare una linea evolutiva, quasi un racconto di semplice fattura che finalmente narri come dall'errore si sia passati alla verità, dai tentativi fallaci o parziali si sia giunti alle risposte soddisfacenti: in tale schema sarebbe facile assegnare a Castigliano un ruolo preminente, scorgendo nella sua opera la trionfale conclusione del tormentato cammino. C'è però anche un altro modo di veder le cose, secondo l'annotazione suggestiva di W. Benjamin che «nulla va perduto per la storia», tentando cioè di considerare ognuno degli «eventi» intervenuti nella vicenda per la sua parte migliore, quale traccia di una domanda degna d'essere esplorata che

1. S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1953, p. 292.
2. Todhunter, K. Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, 2, 1*, Cambridge: at the University Press, 1893, p. 410.

spesso rimane ancor viva al cader della soluzione proposta, poiché l'«evento» successivo non la cancella, ma soltanto la rimuove. Sotto questo profilo, l'opera di Castigliano prende un'altra luce: in essa sembra sparire persino il senso delle vecchie questioni affrontate dai predecessori e tutto appare chiarito al punto da non dover procedere ad altro se non alle applicazioni tecniche. Ma forse ciò non è vero: la risposta esauriente offerta dal nostro scienziato piemontese è di quelle che — come dice il Manzoni — non risolvon le questioni, ma le mutano. Il che può voler dire che nella loro originaria formulazione le antiche domande restano ancora aperte, forse suscettibili di sviluppi imprevisti. Come accenneremo più avanti, questo è il caso di almeno uno dei problemi che Castigliano sbriga in quattro parole, ritenendolo giustamente superato dalla sua chiave interpretativa: è il problema della determinazione dello stress nei sistemi rigidi. In tempi recentissimi, questo lontano percorso di ricerca che chiunque avrebbe ritenuto sepolto da più di un secolo, è riemerso vivacemente all'attenzione resuscitando daccapo promettenti speranze.

Ma c'è di più: la storia che ci accingiamo a presentare mostra una strana peculiarità. Le ipotesi corrette, le formule veritiere che avrebbero condotto alla soluzione, seppur in casi particolari, furono scoperte al primo colpo, a partir da Euler nella memoria del 1773 in cui egli pose il problema «de pressione ponderis». Ed anche in seguito, quando nei primi decenni del 1800 la mano invisibile del tempo o del suo Genio sospinse scienziati di formazione e provenienza diverse a scoprire l'esistenza di un *principio di minimo* quale bandolo dell'intricata matassa, il risultato fu subito conquistato con perfetta determinazione. Eppure non fu altrettanto chiaramente *riconosciuto* nel suo genuino significato. Un eccesso di compiacimento per la mèta sperata o raggiunta faceva sì che gli strumenti per conseguirla fossero lasciati in ombra, come passaggi intermedi su cui non valesse soffermarsi. E invece il vero bandolo della matassa stava appunto nella chiarificazione di quegli strumenti, lasciando eventualmente in ombra, al modo di corollario suggestivo ma tutto sommato improduttivo, la definizione del *principio*.

La nostra storia, cioè, non è tanto quella di un progresso nella *scoperta* di nuove leggi o di nuove proposizioni risolutive; è piuttosto quella di un *riconoscimento* vieppiù rigoroso del significato racchiuso in soluzioni già note da tempo. Invano il Menabrea, ad esempio, cercherà di rivendicare l'originalità del suo «principio di elasticità» screditando i contributi dei predecessori al rango di idee embrionali, ristrette a particolari applicazioni; in realtà le proposte di Vène, Cournot, Pagani, Mossotti e Dorna non peccano affatto per mancanza di generalità e sotto l'aspetto del primato nella *scoperta* rendono assai discutibile la pretesa di Menabrea. Nel medesimo tempo, però, sarebbe assurdo disconoscere il grande ruolo del principio di Menabrea nella difficile via del *riconosci-*

mento, come si vedrà in seguito. Talvolta accade — ed è questo il caso — che le verità più sfuggenti sono quelle appunto più ostentatamente esibite, come si narra in una celebre novella di Edgar A. Poe.

Ebbene, Castigliano detiene un indubbio primato tra i numerosi autori che lo hanno preceduto, proprio e soltanto se si bada all'intensità del riconoscimento più che alla novità della scoperta. Sarebbe infatti incerto affermare che egli abbia dato la prima dimostrazione rigorosa del principio di minimo per i sistemi elastici poiché la sua stessa pista era già stata battuta con successo da altri; in particolare J.H. Cotterill aveva già stabilito nel 1865 con ragionamenti del tutto analoghi le formule intermedie dell'itinerario dimostrativo che in Castigliano prenderanno il nome di «Teorema delle derivate del lavoro di deformazione» (2ª Memoria del 1875). Qui invece sta la grandezza del nostro scienziato: nell'aver dato un nome alla formula intermedia, nell'aver riconosciuto che la via è ancor più importante della mèta, e cioè di quel principio di minimo dal sapore metafisico che gli altri avevano collocato a fondamento di tutta la teoria e che egli relega a livello di corollario.

L'aver fissato l'attenzione sul mezzo più che sul fine è un atto ricco di significato. Nella sua *Wissenschaft der Logik*, Hegel scrisse: «Il mezzo è un che di superiore agli scopi finiti della finalità esterna; l'aratro è più nobile che immediatamente non siano i godimenti ch'esso procura e che costituiscon gli scopi ... Coi suoi strumenti l'uomo domina la natura esteriore, anche se per i suoi scopi le resta anzi soggetto» [3]. Senza voler pretendere troppo da questo richiamo a una filosofia così lontana dall'orizzonte culturale in cui si muoveva Castigliano, si può dire però che egli riconobbe assai chiaramente la preminenza dello strumento di calcolo (la formula intermedia sulle «derivate del lavoro») quale ospite della «razionalità», secondo l'espressione hegeliana; e infatti su di esso egli eresse l'intera *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, l'intero edificio della «Scienza delle costruzioni». In tale opera teorica ma ad un tempo progettuale e quasi «costruttiva» dell'intima sintesi tra conoscenza scientifica e sapere tecnico, Castigliano si mostra vero «ingegnere», nel senso alto che questa parola aveva in Italia verso la fine dell' '800, possessore e custode della τέχνη : in realtà, che cos'è la tecnica se non appunto la scienza dei mezzi?

I prodromi della vicenda

Non accade spesso che di una storia si possa assegnare una data precisa, un'occasione singolare da cui essa abbia tratto inizio; ma questo è il nostro ca-

3. G.W.F. Hegel, *Wissenschaft der Logik*, II, 2, cap. III, c.

so. Come già per altri problemi «fondativi» della statica e della scienza strutturale, è lecito forse fissare il luogo e il tempo in cui la questione fu posta per la prima volta con tale consapevolezza e decisione da racchiudere *in nuce* gran parte degli sviluppi successivi. Il luogo fu l'Accademia delle Scienze di S. Pietroburgo, l'anno il 1773, l'autore Leonhard Euler, con la dissertazione *«De pressione ponderis in planum cui incumbit»* [4]. Naturalmente, però, ogni storia ha una sua preistoria, ogni giudizio esplicito affonda le sue radici in un terreno pregiudiziale (Gadamer) che lo determina o quanto meno lo orienta. Nel nostro caso le radici richiamano addirittura ai primordi della meccanica moderna, alla stagione di Galileo e Stevin, tanto per citar due nomi di preminente grandezza, quando cioè fu formulato un *principio di riduzione* idoneo a conferire un'immagine concettuale unitaria e a stabilire un criterio di equivalenza su intuizioni ancor oscure e confuse relative al peso, alla forza, alla *gravitas secundum situm*, alla pressione e alla tensione. Nella trattazione di Stevin sul problema del piano inclinato, la pressione esercitata dal peso è resa equivalente alla tensione agente in una delle funi di una «macchina funicolare» ed è così ricondotta alla componente di una forza secondo un'opportuna direzione. Ciò che si deve imporre affinché valga l'equivalenza è che la «macchina funicolare» consenta al peso di compiere quei soli spostamenti possibili che il piano inclinato non impedisce. Ecco: in questo modo di procedere così persuasivo da entrare nella consuetudine («in elementis doceri solet», dirà Euler) son tuttavia nascosti alcuni passaggi non del tutto chiariti; buona parte del dibattito sul «problema degli appoggi» trarrà origine da essi. Anzitutto, l'identificare la pressione nella forza, riportando il problema alla operazione inversa rispetto al calcolo della risultante di due o più forze, va inteso come *definizione* del concetto di pressione o come *legge fisica* analoga a quella che connette la forza all'elongazione di un provino? E inoltre, il criterio di equivalenza, secondo il quale occorre e basta garantire l'identità degli spostamenti possibili, esprime un *fatto* o una *convenzione*? Le alternative qui formulate non sono affatto oziose: ed è proprio il problema degli appoggi a manifestarne l'incidenza dinanzi al paradosso dei sistemi staticamente indeterminati. I casi son due, infatti: o si ritiene che manchi qualcosa alle leggi generali della statica, ferma restando l'identità di pressione e forza nonché la tautologica validità del criterio di equivalenza; o si afferma che la pressione è bensì misurata da una forza, ma non si identifica con essa, poiché è

4. L. Euler, *De pressione in planum cui incumbit*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae *18* (1773), 1774, p. 289-329; Opera Omnia II, 9 Commentationes mechanicae, pp. 1-34. Sullo stesso tema cfr. anche: *Vom dem Drucke eines mit einem Gewichte beschwerten Tisches auf einer Fläche. Aus den Papieren des Sel. Leonhard Euler gezogen, von Jacob Bernoulli.* Archiv der reinen un angewandten Mathematik, *I: I*, 1794, pp. 74-80; Opera Omnia, ibidem, pp. 407-412. Questo secondo saggio, tuttavia, differisce dal primo solo per la maggior concisione.

governata da leggi fisiche che, aggiungendosi a quelle generali della statica, la connotano e la determinano ulteriormente.

Quale sia la posizione di Euler a questo proposito, non è chiaro. Dopo aver succintamente esposto la soluzione del caso «quo pondus ternis pedibus plano insistit», egli osserva: «Verum si pondus quatuor pedibus plano insistat, determinatio singularum pressionum non solum multo magis ardua deprehenditur, sed etiam incerta et lubrica videtur». Se i piedi d'appoggio son quattro, cioè, la soluzione è non solo assai più ardua ma anche incerta e ingannevole: ad esempio, la presenza di asperità nel piano o qualche imperfezione nei piedi può far sì che il corpo poggi su tre punti e la pressione del quarto sia nulla. Per questo — aggiunge Euler — «ne perfectissima illa pedum aequalitas, qualem vix admittere licet, negotium facessat, concipiamus planum sive solum, cui pondus imcumbit, non adeo esse durum (...) sed quasi panno esse obductum, cui pedes aliquantillum se immergere queant». Con ciò il problema cambia forma: non più si ha l'appoggio su un piano rigido, ma l'appoggio su un suolo — potremmo dir oggi — alla Winkler. Tuttavia, e qui sta il punto, «neminem pannus ille pressioni cedens offendat, etsi enim illi mollitiem quandam tribuimus, eam tamen, quousque libuerit, diminuere licebit; ita ut tandem indolem soli illius, cui pondus revera insistit, adipiscatur».

Con altre parole, per Euler, il supporre cedevole il piano non è che un accorgimento concettuale utile a comprendere quel che avviene nel piano rigido e il passaggio dall'un caso all'altro è governato da un argomento consueto in matematica, come quando per stabilire una relazione tra elementi infinitesimi si tien sott'occhio una figura di dimensione finita. Orbene, per il suolo cedevole «ausiliario» nel quale i quattro piedi A, B, C, D penetrano «per spatiola $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ quae (...) infinite parva spectare licebit», si deve ritenere che le pressioni esercitate dai piedi siano proporzionali a quegli spostamenti. «Hinc igitur vicissim si in punctis A, B, C, D super plano erigantur perpendicula $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, et $D\delta$ quae sint ipsis pressionibus in his punctis proportionalia, necesse est, ut puncta $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, reperiantur in eodem plano». Questo è appunto il principio sul quale è fondata l'indagine di Euler, il quale tiene ulteriormente a ribadire che tale proprietà, pur essendo tratta dall'esempio del suolo cedevole, ne è indipendente, poiché gli spostamenti idealmente introdotti «hic tantum in subsidium nostrae imaginationis sunt vocati».

È evidente l'ambiguità del testo euleriano: la stessa proporzionalità tra pressione e spostamenti non viene attribuita alla natura elastica del suolo, ma è affermata come un dato evidente di per sé, quasi derivasse direttamente dalla definizione di pressione. Ciò non deve stupire; già nella sua *Mechanica sive scientia motus analytice exposita* del 1736, Euler aveva inteso la proporzionalità tra forza e accelerazione quale «verità di ragione» deducibile *a priori* dal principio metafisico della «ragione sufficiente». Nel medesimo tempo, tuttavia, neppure vien rinnegata l'immagine del suolo cedevole «come un panno» che suggerisce al contrario una base empirica della proporzionalità tra pressioni e spostamenti. Altrettanto incerta è la natura del *Principium generale* che l'Autore formula a conclusione dei ragionamenti sopra riportati: «sive pondus pluribus pedibus innitatur, sive basi incumbat plana cuiuscumque figurae, sit punctum *M* (fig. 1) sive extremitas cuiuspiam pedis, sive elementum quodpiam basis, pro quo pressio quaeritur. Concipiatur ibi perpendiculariter erecta linea *M* ipsi pressioni proportionalis, atque necesse est omnia ista puncta μ in quopiam plano terminari» (Sia che il peso poggi su più piedi, sia che poggi su una qualunque figura piana, si consideri il punto *M* estremità di un piede o elemento della base. Eretta una linea *M* perpendicolare al piano d'appoggio e proporzionale alla pressione, è necessario che tutti i punti μ appartengano a uno stesso piano).

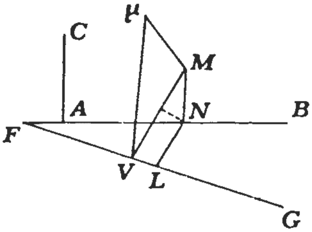


Fig. 1

Su questo *Principio* si infervorirà la discussione per ottant'anni precisi, e cioè sino al 1853, quando Giuseppe Fagnoli, ultimo rappresentante di coloro che volevano riportare alle pure leggi della statica la soluzione dei problemi staticamente indeterminati, tornerà sulla tesi euleriana, offrendone una diversa interpretazione. Comunque, quale che fosse l'opinione di Euler sulla natura del suo Principio, non c'è dubbio che esso consentiva di risolvere agevolmente il problema degli appoggi con piena generalità; numerosi esempi e accurate applicazioni occupano appunto gran parte del saggio, dimostrando una volta di più la maestria dell'Autore. Pur non potendoci soffermare, merita segnalare la singolare eleganza della soluzione offerta per il problema del tripode. Euler osserva che se la risultante del peso *P* passa per *O* (fig. 2), le reazioni d'appoggio R_A, R_B, R_C sono date da:

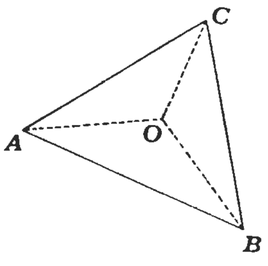


Fig. 2

$$R_A = P\frac{[BOC]}{[ABC]} \quad R_B = P\frac{[COA]}{[ABC]}$$

$$R_C = P\frac{[AOB]}{[ABC]}$$

dove *[ABC]*, *[BOC]*, ... indicano l'area dei triangoli *ABC*, *BOC*, ... Ricordando che le reazioni in A e B nella trave su due appoggi (fig. 3) soggetta al peso P sono rispettivamente:

$$R_A = P\frac{[OB]}{[AB]} \quad R_B = P\frac{[AO]}{[AB]}$$

Fig. 3

dove $[AB]$, $[OB]$, $[AO]$ indicano la lunghezza dei segmenti AB, OB, AO, appar chiaro che, passando da due a tre appoggi, permane un'analogia strettissima. Non potrebbe essere questo un invitante indizio della presenza di qualche riposta armonia perdurante anche nel passaggio da tre a quattro, ... a n appoggi? Gli immediati successori di Eulero saranno alquanto sedotti da tale suggestiva ipotesi.

Non però Jean Baptiste Lerond D'Alembert, il secondo personaggio che si incontra nella nostra storia, che dedicò al problema degli appoggi parte di una memoria dal titolo *Sur quelques questions de Méchanique* inserita nel Tomo VIII (pp. 36-45) degli *Opuscula* (1780). Il proposito di D'Alembert è soprattutto quello di presentare una questione che appare «digne d'exercer les Géomètres» definendone precisamente i termini nel caso più semplice di tre appoggi allineati. Dopo aver mostrato brevemente che il problema è staticamente indeterminato, D'Alembert fissa con grande chiarezza gli intervalli entro i quali possono variare le tre reazioni d'appoggio nell'ipotesi che siano escluse reazioni negative (ossia, possiamo dire, nell'ipotesi di «vincoli monolaterali»).

Con riferimento alla figura 4a, dove A, B, C designano gli appoggi e O è il punto pel quale passa la risultante del peso, la reazione in A deve essere compresa tra un minimo (per $R_B = 0$) secondo la

$$P\frac{b}{a+b} \leqslant R_A \leqslant P\frac{b+c}{a+b+c}$$

Mentre:

$$0 \leqslant R_B \leqslant P\frac{a}{a+b},$$

$$0 \leqslant R_C \leqslant P\frac{a}{a+b+c}$$

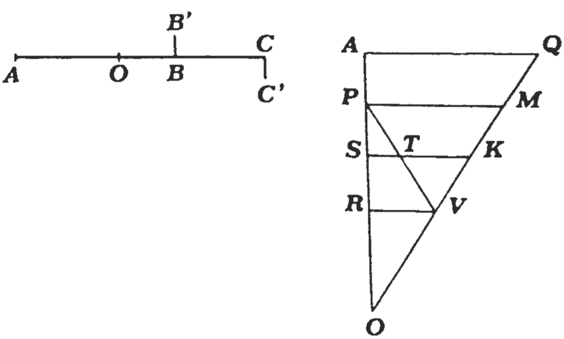


Fig. 4

Inoltre, se si pone $R_B = P(a+\omega)/(a+b)$ (con $0 \leqslant \omega \leqslant a$), deve aversi

$R_C = P\omega/(a+b+c)$. Pertanto, conclude D'Alembert, «quelque petite que soit la quantité c, c'est à dire, quelque proche que soient l'un de l'autre les appuis B, C, on peut supposer, au moins d'après la théorie connue jusqu'à présent, que le poids supporté par un des appuis soit $= 0$; et comme on peut prendre un de ces deux appuis à volonté, pour celui dont la charge est nulle, il est clair que la théorie connue jusqu'ici est insuffisante pour résoudre le problème en question» [5]. Il diagramma della fig. 4b rappresenta efficacemente la situazione nella sua indeterminatezza: in esso il segmento AQ è proporzionale al peso P e i segmenti AP, AR denotano rispettivamente il limite inferiore e superiore di R_A, mentre PM indica la reazione R_B nell'ipotesi $R_C = 0$, e RV la reazione R_C nell'ipotesi $R_B = 0$. Se dunque si assegna a R_A la determinazione compatibile AS, le altre due reazioni R_B, R_C son date dai segmenti TK e TS rispettivamente.

D'Alembert si limita a porre i termini del problema senza farsi propositore di una soluzione; una sola ipotesi egli formula di sfuggita, supponendo che gli appoggi B e C non siano allineati con AO e si pongano in B', C' con $[BB'] = [CC']$ (fig. 4a); in tal caso risulterebbe $R_B = R_C$, qualunque sia il valore di $[BB']$, e quindi anche per $[BB'] \to 0$. È un tentativo analogo a quello di Euler: partire da un sistema «ausiliario» risolubile per giungere al sistema «reale» per via d'un passaggio al limite. Ma il nostro Autore si rende subito conto che «cette supposition précaire laisse encore ici beaucoup d'incertitude», come del resto — egli aggiunge — la soluzione «incertaine et hypothétique» di Euler [6].

Tuttavia, la linea tracciata da D'Alembert con la semplice posizione del del problema per vincoli monolaterali avrà un certo sviluppo; in particolare Fourier, Navier e Cournot la riprenderanno aggiungendo alla condizione $R \geqslant 0$ per ogni reazione d'appoggio, una seconda condizione espressiva dei «limiti di resistenza» $R < R_{lim}$. Ciò consentirà, ovviamente, di scavalcare l'ostacolo dell'indeterminazione statica delle reazioni, per stabilire un limite superiore al peso P in corrispondenza del quale uno degli appoggi cederebbe. Nonostante l'evidente interesse di tali primi esempi di *analisi limite*, essi esulano alquanto dalla via maestra seguita dalla maggior parte dei ricercatori per sciogliere l'enigma degli appoggi staticamente indeterminati. L'intento di Fourier era appunto quello di mostrare che «la détermination individuelle des pressions n'est pas nécessaire, et qu'il est superflu de recourir à d'autres principes que ceux de la statique»; il problema era così rimosso più che risolto. Ma una simile scorciatoia non ebbe successo; i meccanici (Navier e Cournot compresi) preferirono piuttosto vederci chiaro.

5. J.B. D'Alembert, *Sur quelques questions de Méchanique*, Opuscula, *8*, Mém. 56, § II, 1780, Paris, p. 38.
6. Ibidem, p. 40.

La discussione italiana nel 1700

È del genio italiano prediligere quelle questioni che abbiano un aspetto enigmatico da sciogliersi più con l'intuizione geniale che con calcoli sistematici e prender gusto nelle polemiche scientifiche con una perseveranza che apparirebbe irragionevole se non fosse ravvivata da uno spirito quasi giocoso di gara intellettuale, per quanto arido sia l'argomento del dibattere. Se poi l'enigma evoca domande di sentore metafisico, come se il tema disputato fosse una storia di *experimentum crucis* per ipotesi generali sulla natura delle cose e della conoscenza, allora la perseveranza si muta in vera ostinazione, la polemica in guerra. Ebbene, il «problema degli appoggi», a dispetto della sua parvenza innocente di diatriba accademica quasi oziosa, ospitava quel tanto di enigmatico e di metafisico da accendere gli animi. Non si può comprendere a fondo il ruolo storico di Castigliano in Italia — ed anche l'ambigua accoglienza dei risultati da lui conseguiti — se non si tien presente l'incidenza «nazionale» della questione; la quale aveva trovato in Italia efficaci stimoli alla speculazione teorica secondo diversi orientamenti, talvolta ancor impigliati nella tradizione sospettosa delle Scuole, talaltra — e più spesso — all'avanguardia nella ricerca di nuove vie e di ambiziose sintesi, sulla scorta della chiarificazione dei principi della meccanica offerta dal torinese Luigi Lagrange.

È forse lecito affermare che la prima apparizione in Italia del problema degli appoggi s'ebbe con la traduzione del *Traité élémentaire de Méchanique* dell'abate Charles Bossut, stampato a Pavia nel 1788 con notevoli arricchimenti rispetto alla prima edizione francese del 1763. Il Bossut aveva dato forma «elementare» alla dimostrazione del risultato euleriano per il tripode riconducendo il corpo rigido ABC ed un sistema di due leve: la leva AD con fulcro in O che consente di sostituire al peso P in O le forze $-R_A$ e $-R_D$ in A e D rispettivamente; la leva BC poggiante sulla AD in D che consente a sostituire a $-R_D$ le forze $-R_B$ e $-R_C$ in B e in C rispettivamente. Poiché evidentemente dalla legge della leva risulta

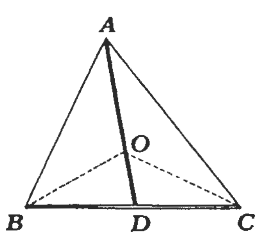


Fig. 5

$$R_A = P\frac{[OD]}{[AD]} \quad R_B = P\frac{[OA]}{[AD]}\frac{[DC]}{[BC]}$$

$$R_C = P\frac{[OA]}{[AD]}\frac{[BD]}{[BC]} \qquad [1]$$

è agevole trarre la serie di proporzioni

$$P : R_A : R_B : R_C :: [BC]\,[AD] : [OD]\,[BC] : [OA]\,[DC] : [OA]\,[BD] :: \\ :: [ABC] : [OBC] : [OCA] : [OAB] \qquad [2]$$

Questo è appunto il teorema che Eulero aveva formulato senza dimostrazione. Ciò posto, Bossut concludeva così: «Quando i tre appoggi *ABC* sono in una linea retta, i triangoli *ABC, OBC, OAC, OAB* s'annullano, ed il rapporto delle forze P, R_A, R_B, R_C è indeterminato. Se il corpo s'appoggia con più di tre punti, il problema, considerato sempre secondo le leggi ordinarie della Meccanica, è indeterminato, qualunque sia la disposizione rispettiva degli appoggi» [7].

Questa affermazione e più ancora la precedente interpretazione del sistema in termini di leve opportunamente disposte, alimenteranno la lunga disputa che, a partire dal 1790, trovò la sua palestra nelle *Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana*, pubblicate a Verona. L'autore che dette inizio alla controversia fu il capitano bresciano Paolo Delanges, Professore nella scuola militare di Verona, collega ed amico del Salimbeni, del Lorgna e di altri esponenti dell'illuminismo veneto, valente studioso di numerosi temi attinenti alla meccanica applicata e alla statica delle strutture: dalla spinta delle terre alla resistenza dei muri, all'attrito e ai suoi effetti nelle macchine, alla meccanica dei semifluidi, all'equilibrio dei tetti e delle volte. Nonostante questi suoi meriti, i contributi da lui offerti al problema degli appoggi son tutt'altro che perfetti: anzi sono vistosamente — forse addirittura ingenuamente — erronei. Sull'argomento il Delanges tornò tre volte sull'arco di circa vent'anni testimoniando così quanto gli premesse venir a capo dell'enigma: la prima volta nel 1790, la seconda nel 1798, la terza nel 1811 con la proposta di un'indagine sperimentale [8]. Il nostro autore era convinto che anche nell'ambito delle ordinarie leggi della meccanica fosse possibile escludere l'indeterminazione, «non iscorgendosi ragione alcuna per cui determinato dovesse esser il problema fino a tre punti, e non più». Del resto — aggiunge Delanges — la soluzione di Bossut è solo in apparenza determinata poiché dalle [1], [2] emerge che il valore della «pressione» in uno dei punti d'appoggio (ad es. R_A) resta immutato pur spostando (sotto certe condi-

7. C. Bossut, *Trattato elementare di meccanica, 1,* Pavia, 1788, p. 212 e ss. Va notato che la soluzione al problema del tripode data da Eulero e ripresa da Bossut ha un precedente nella soluzione al problema del peso sostenuto da tre corde non complanari offerta da Philippe De La Hire nel suo *Traité de Méchanique* (Paris, 1696). De la Hire aveva anche osservato che se la verticale del peso e due delle corde sono complanari, la terza corda è scarica (*Prop.* XXIX, pp. 58-60).

8. Delanges, *Memoria sulle pressioni esercitate da un corpo sostenuto da tre o più appoggi collocati nello stesso piano.* Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana *5,* 1790, pp. 107-129; *Nuove considerazioni intorno alla pressione d'un corpo sostenuto da tre o più appoggi in un piano orizzontale. Ibidem, 8, 1,* 1799 (1798), p. 60-76; *Analisi e soluzione sperimentale del problema delle pressioni,* Ibidem, *15, 1,* 1811, p. 329.

zioni) gli altri due appoggi. Di qui l'esigenza di una nuova soluzione al problema, che eviti di «dar mano a ipotesi o sussidj ed immagini [le due leve del Bossut] non convenienti alla naturale sua costruzione» [9]. In realtà, Delanges non fa che sostituire all'immagine delle due leve, una nuova immagine interpretando il tripode *ABC* come leva angolare a tre braccia *AO, BO, CO*. L'equilibrio è descritto imponendo l'equazione dei momenti rispetto agli assi *IL, DE, HF:*

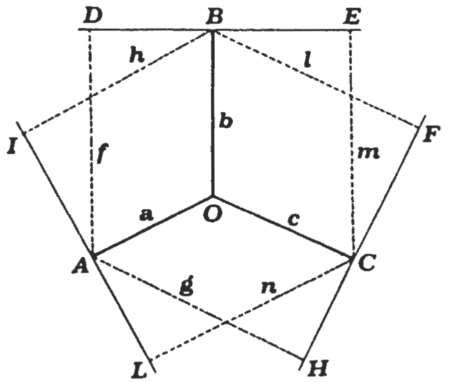


Fig. 6

$$\begin{aligned} Pa &= R_B h + R_C n; \\ Pb &= R_A f + R_C m; \\ Pc &= R_A g + R_B l \end{aligned} \qquad [3]$$

da cui si traggono le determinazioni :

$$R_A = P\frac{bln + chm - alm}{fln + ghm};$$

$$R_B = P\frac{agm + fcn - bgn}{fln + ghm};$$

$$R_C = P\frac{afl + bgh - cfh}{fln + ghm} \qquad [4]$$

Sin qui, possiamo dire, la variante rispetto alla soluzione di Euler/Bossut è del tutto lecita e tanto elementare da apparire priva di interesse. Ma non è di questo parere Delanges, il quale ritiene straordinario il fatto che R_A, R_B, R_C dedotte dalla sola equazione dei momenti soddisfino la condizione $R_A + R_B + R_C = P$: ciò è reso da lui oggetto di un intricato teorema la cui dimostrazione geometrica occupa numerose pagine del saggio, frutto dell'incredibile fatica intellettuale di due allievi del Collegio militare di Verona, i Sigg. Bernardi e Romanò. Se dunque per il tripode la soluzione è data da una triplice applicazione dell'equazione dei momenti, perché non sperare che per il corpo su quattro appoggi interpretato quale leva angolare a quattro braccia il risultato sia analogamente dedotto da una quadruplice applicazione della medesima equazione?

Ahimé, troppa virtù può esser vizio: così come la sviscerata obbedienza degli alunni Bernardi e Romanò li affogò in una palude di passaggi dimostrativi senza che essi osassero considerar criticamente la mèta dei loro sforzi e riconoscerne così la banalità, allo stesso modo l'indubbia perizia e una certa abnegazione di Delanges ad affrontare laboriosi calcoli lo indussero a dichiarare provata la sua speranza, benché a prima vista essa appaia fallace. Ad esempio, nel

9. Delanges, *Memoria sulle pressioni*... cit., p. 111.

caso in cui gli appoggi del tripode tendano a disporsi su una medesima retta secondo lo schema di fig. 7, l'Autore trova che $f = h$, $g = n$, $l = m$, sicché l'applicazione delle [4] conduce alle:

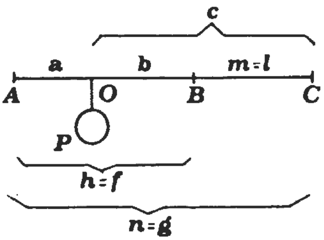


Fig. 7

$$R_A = P\frac{b}{a+b} \quad R_B = P\frac{a}{a+b} \quad R_C = 0$$

dimostrando, dunque, «che il peso P è soltanto portato dai due appoggi tra i quali esercita la sua azione, e rimane superfluo il terzo situato al di là di essi» [10]. In realtà. l'equazione dei momenti direttamente applicata alla trave continua della fig. 7, rivela subito che le sostituzioni operate da Delanges non sono corrette in segno. Le [3] diventano infatti:

$$Pa = R_Bh + R_Cn; \qquad Pb = R_Ah - R_Cm; \qquad Pc = R_An + R_Bm$$

e danno luogo a un sistema indeterminato nelle incognite R_A, R_B, R_C. Sarebbe però opera impervia oltreché oziosa seguir passo per passo la trattazione indicando i punti nei quali si insinua l'impercettibile ma nefasto errore; lo ha già fatto per noi Pietro Paoli che vi dedicò tempo e fatica, spinto come era dal pungolo d'averla vinta nella polemica col suo rivale.

Il primo intervento del Paoli s'ebbe nel 1792 con un limpido e rigoroso lavoro volto a segnalare l'efficacia del metodo generale proposto da Luigi Lagrange nella *Méchanique analytique* [11]. «Tutti i problemi, che hanno rapporto all'equilibrio — egli dice — si possono considerare come risoluti nella Meccanica Analitica del Sig. De la *Grange*; almeno in quell'opera eccellente si trovano i principj necessarj per risolverli tutti». Ciò consentirà di chiarire finalmente, anche per il problema degli appoggi, quel che «da' soli principj della meccanica senza alcuna ipotesi possa sperarsi» [12]. La critica è dunque diretta alle soluzioni dei precedenti autori che presumevano di sciogliere la questione con vari accorgimenti arbitrariamente dedotti da tali principi; occorre infatti riconoscere che se il corpo poggia su un piano in più di tre punti il problema è indeterminato, mentre se il corpo fosse appoggiato su vari piani diversamente inclinati l'indeterminazione emergerebbe per più di sei appoggi. L'analisi è svolta utilizzando il principio delle velocità virtuali e imponendo le condizioni affinché resti impedi-

10. Ibidem, p. 120.
11. P. Paoli, *Memoria sopra alcuni problemi meccanici*, Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, 6, 1792, p. 534-559.
12. Ibidem, p. 536.

to sia il «moto progressivo», sia il «moto di rotazione». Ora è evidente che per impedire il moto di rotazione, con riferimento all'appoggio su un piano, occorre e basta considerare due assi distinti; la proposta di Delanges è pertanto inefficace e non può che condurre a soluzioni apparenti; «cioè nella forma 0/0, com'è noto dalla teoria della eliminazione» [13]. Va notato che la dimostrazione del Paoli non è originale; essa corrisponde quasi puntualmente a quella data da Vincenzo Riccati nella quinta delle lettere al P. Virgiglio Cavina (in data 23 Novembre 1770) che compongono il trattato *De' principj della Meccanica* [14].

Comunque, il contributo di Paoli rivendica giustamente i diritti dell' «ortodossia»; se prima era possibile sospettare che l'indeterminazione statica delle reazioni nella trave continua su tre appoggi derivasse dalla forma particolare della soluzione di Euler e Bossut per il tripode e che esistesse invece un'altra forma risolutiva, ormai tale sospetto è fugato. L'indeterminazione permane, pur risolvendo il problema «nella massima generalità» [15]. L'unica via che si presenta ai ricercatori successivi per superare l'enigma degli appoggi sovrabbondanti può esser soltanto quella di individuare un nuovo principio statico o una nuova «sintesi» empiricamente fondata. Questa via continuerà ad essere praticata sino al tempo di Castigliano, quando la meta sembrava conseguita col sovrano «Principio di Elasticità» di Menabrea; sarà proprio Castigliano ad abbandonarla con la sua deliberata *riduzione* del medesimo «Principio di Elasticità» a particolare corollario di precedenti teoremi.

L'autore che per primo tentò di formulare un postulato ragionevole, o una legge plausibile, chiaramente indeducibile dai principi della meccanica, fu Anton Maria Lorgna, il celebre illuminista. In un saggio pubblicato nel 1794 col titolo *«Dell'Azione di un corpo retto da un piano immobile esercitata ne' punti di appoggio che lo sostentano. Tentativo del Sig. Cavaliere Lorgna»* [16], lo stato della questione era da lui avvertito nei termini posti da D'Alembert: essendo infatti indubitabili i risultati di Paoli, era necessario riconoscere con D'Alembert «qu'il manque encore quelque chose aux principes de Méchanique, et qu'il y à des cas où les loix connues jusqu'ici paroissent insuffisantes».

Il «nuovo tentativo» di Lorgna consiste nell'interpretare il corpo che poggia in n punti su un piano come un insieme di tripodi ottenuti dalle combinazioni possibili di quei punti, a tre a tre. Per aiutare l'immaginazione si potrebbe pensare ad un plico di triangoli, in contatto l'uno sull'altro per i vertici, che nel complesso configurano il poligono di appoggio. I diversi tripodi, il cui numero è $n(n-1)(n-2)/3!$, sono da Lorgna considerati «attivi» se il centro di gra-

13. Ibidem, p. 540.
14. V. Riccati, *De' principj della Meccanica,* Venezia, 1772, pp. 24-26.
15. P. Paoli, loc. cit., p. 543 e ss.
16. In Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, *7*, 1704, pp. 178-192.

vità del corpo cade nel triangolo degli appoggi, e «inoperanti» nel caso opposto. Ciò deriva dall'intenzione di tener conto del vincolo monolaterale. Ad esempio, per il quadrangolo *ABCD* (fig. 8) — dice l'Autore — «i due sistemi *ACD, ADB* non hanno per sé alcuna attitudine a sostenere il peso *P*, poiché il centro cade totalmente fuori dei perimetri di entrambi. Ma è certissimo, che ciascuno degli altri due *BCD, ACB* è atto per sé (...) a sostenere l'intero peso *P*; e però questi due sono i sistemi ch'io chiamo attivi, e inoperanti gli altri due in qualità di sistemi» [17].

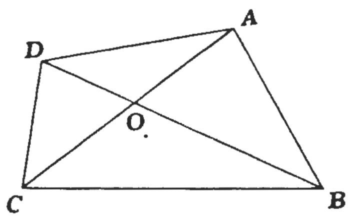


Fig. 8

A questo punto, l'indeterminazione statica del problema consiste nell'impossibilità di sapere quale porzione del peso *P* debba essere attribuita ad ognuno dei tripodi «attivi». Ecco dunque il postulato proposto del Lorgna: «Ch'essendo retto un corpo da un piano immobile in più di tre punti non posti per diritto, possa considerarsi, che l'azione della gravità si eserciti distribuita ugualmente sopra tutti i sistemi di tre appoggi, tra i quali cade il centro di gravità del corpo ...» [18].

È superfluo sottolineare l'arbitrarietà di un tal postulato che nella mente del suo autore dovrebbe forse trarre giustificazione dal principio di ragione sufficiente, non essendovi alcun motivo per privilegiare nel corpo rigido l'uno o l'altro dei tripodi «attivi». D'altra parte è anche giusto osservare che il tentativo di «decomporre» un sistema complesso, staticamente indeterminato, in un insieme di sistemi semplici, ha dalla sua una lunga tradizione nella scienza e nella tecnica delle costruzioni; basti pensare ai modelli statici elementari che furono di consueto utilizzati per rappresentare il problema del muro di sostegno o dell'arco, o ancora della trave reticolare e dell'incavallatura iperstatica, sinché non vennero in luce i metodi generali dell'analisi elastica di cui Castigliano fu il vero pioniere [19].

Due anni prima del tentativo di Lorgna, un altro scienziato aveva rivolto i suoi sforzi alla ricerca di un nuovo principio e di una «nuova sintesi., come egli amava chiamarla. Si tratta di Mariano Fontana, professore di Matematica Applicata all'Università di Pavia e autore di un cospicuo trattato di Dinamica. Nel

17. Ibidem, p. 180.
18. Ibidem, p. 182.
19. A titolo di esempio, ricordiamo che, quasi contemporaneo al maggior testo di Castigliano, uscì a Parigi un grosso volume di Planat dove la soluzione dei sistemi iperstatici era proposta con argomenti approssimativi del tutto analoghi a quelli del nostro Lorgna.

secondo volume di tale trattato, il problema degli appoggi torna con insistenza come un cruccio pressante da cui l'autore non riesce a liberarsi, nonostante le soluzioni via via proposte o promesse [20].

Ma alla «nuova sintesi» il Fontana non giunge; le sue ipotesi si susseguono al modo di una meditazione contrastata dove ogni passaggio è messo per iscritto nello stile risoluto e incerto insieme di un provvisorio appunto. Per la trave su tre appoggi (monolaterali) *ABC* di fig. 4 l'opinione del nostro autore è la stessa di Delanges: se la risultante di carichi passa tra *A* e *B*, il terzo appoggio *C* «andrà affatto esente da ogni carico» poiché «tenderà l'estremo *C* della trave di sua natura a salire» [21]. Tuttavia la dimostrazione addotta è quanto mai intricata e vaga. Per il corpo sostenuto da quattro appoggi su un piano orizzontale l'analisi si fa ancor più confusa: supponendo dapprima che il corpo «dispensi la propria pressione col mezzo di certi strumenti inflessibili», Fontana avverte correttamente che il problema è indeterminato; subito dopo però soggiunge: «che se un grave posa sopra un piano retto da quattro piedi, il problema di natura sua è determinato poiché il piano stesso fa le veci di quattro verghe». La soluzione è ottenuta nel caso particolare della fig. 9, immaginando che il peso *P*assante per *O* sia trasmesso ai lati del parallelogramma *ABCD* dalle verghe *QS* e *RT*. Se P_Q, P_S, P_R, P_T sono le «pressioni» esercitate da *P* in *Q, S, R, T*, risulta evidentemente:

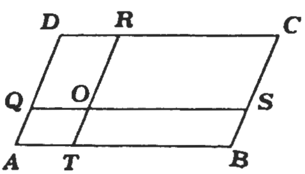


Fig. 9

$$P_Q = (P - P_R - P_T)\frac{[OS]}{[QS]}$$

$$P_S = (P - P_R - P_T)\frac{[QO]}{[QS]}$$

$$P_R = (P - P_Q - P_S)\frac{[OT]}{[RT]}$$

$$P_T = (P - P_Q - P_S\frac{[RO]}{[RT]}$$

D'altra parte, deve aversi, ad es. per il punto *D*:

$$R_D = P_R\frac{[OS]}{[QS]} + P_Q\frac{[OT]}{[RT]}$$

20. M. Fontana, *Della Dinamica libri tre*, *2*, Pavia 1792, cfr. in particolare: pp. 34-45; 95-98.
21. Ibidem, p. 39.

donde viene:

$$R_D = P\frac{[OS]}{[QS]}\frac{[OT]}{[RT]} \quad R_C = P\frac{[QO]}{[QS]}\frac{[OT]}{[RT]}$$

$$R_A = P\frac{[OS]}{[QS]}\frac{[RO]}{[RT]} \quad R_B = P\frac{[QO]}{[QS]}\frac{[RO]}{[RT]}$$

«Di passaggio si osservi — conclude Fontana — che qualunque delle quattro pressioni come *D* è proporzionale al parallelogrammo *OB*, che è intorno all'angolo opposto *B*» [22]. Il risultato è senza dubbio brillante poiché estende a questo caso di appoggio su quattro punti il bel teorema di Euler relativo al tripode. Ma a quale prezzo? e con quali margini di incertezza, permanendo l'indeterminazione statica precedentemente riconosciuta?

E infatti, nell'Appendice II del medesimo capitolo in cui appare la soluzione sopra richiamata, Fontana torna sui suoi passi: «Dopo le brevi considerazioni che esposti in quel luogo — egli dice — mi posi a meditare più attentamente questa materia, e sono persuaso, che volendo analiticamente procedere, il detto problema non si determina co' soliti principi della meccanica, quando i punti d'appoggio sono più di tre» [23]. La sola speranza di giungere a una soluzione resta dunque affidata alla scoperta di un'«opportuna sintesi».

La battaglia per vincere l'enigma si trascina nel corso degli anni, aprendosi ancor su nuovi fronti. Il tomo VIII delle «Memorie della Società Italiana» raccoglie un numero impressionante di pagine sull'argomento. S'era al tempo di Napoleone; l'Italia era sconvolta dal crollo del vecchio mondo: Venezia annessa all'Austria, inedite repubbliche, governi provvisori. La stessa «Società Italiana» dovette trasferire l'edizione delle Memorie da Verona a Modena. Ma i nostri scienziati non s'erano lasciati distrarre dagli avvenimenti; imperterriti continuavano a seguire il filo della loro ricerca. Ecco infatti a p. 60 di quel tomo le *«Nuove considerazioni intorno alla pressione d'un corpo sostenuto da tre e più appoggi in un piano orizzontale»* di Paolo Delanges tese a difendere i metodi e i risultati che Pietro Paoli aveva contestato. *Nihil novi*, si sarebbe tentati di dire dopo una sommaria lettura del saggio; ma non è così. Anzitutto l'Autore rivendica un'essenziale differenza tra il problema della decomposizione di una in più forze parallele e il problema degli appoggi: il primo è chiaramente indeterminato se il numero delle forze cui s'impone di far equilibrio alla forza data è maggiore di tre; il secondo no: «chiunque, a cagion d'esempio, converrà, che poggiato un corpo su quattro sostegni de' quali i vertici sieno in un piano orizzontale e disposti agli angoli d'un quadrato, nel di cui centro cada la verticale che

22. Ibidem, p. 44.
23. Ibidem, pp. 95-96.

passa pel centro di gravità del corpo, ogni sostegno soffra la pressione equivalente alla quarta parte del peso intiero del corpo: mentre se volesse sospendersi in equilibrio il corpo medesimo, mediante quattro forze verticali nelle stesse circostanze, bensì le opposte per diagonale saranno eguali tra sé, ma possono diversificarsi all'infinito» [24]. L'osservazione è senz'altro azzeccata; come vedremo avrà un seguito presso successivi ricercatori. In secondo luogo il Delanges propone un nuovo metodo per ottenere daccapo i risultati della sua iniziale Memoria sfuggendo però questa volta all'esiziale critica di Paoli. Detto in breve, il metodo è quello delle velocità virtuali, corretto però da una restrizione che configura in realtà un principio aggiuntivo rispetto alle leggi della statica; nel computo del lavoro virtuale delle forze reattive, infatti, Delanges propone di cancellare il contributo di quelle reazioni il cui lavoro virtuale sia positivo, esprimendo così la monolateralità del vincolo. Il nuovo principio sarebbe dunque del tipo

$$P\delta\eta + \Sigma' \; R_i \; \delta\eta_i = 0 \qquad [5]$$

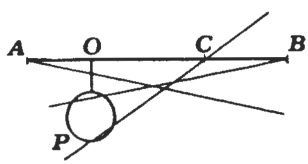


Fig. 10

dove $R_i \, \delta\eta_i$ indica il lavoro compiuto dalla reazione R_i per lo spostamento virtuale η_i; e la somma Σ' è estesa a quelle sole reazioni il cui verso (prevedibile a priori) sia discorde con lo spostamento relativo. Ad esempio, per la trave continua di fig. 10, l'autore impone dapprima una rotazione rigida intorno ad A e un'altra rotazione intorno a B ottenendo così:

$$R_C \, (a+c) \; + \; R_B \, (a+b) \; = \; aP$$
$$R_A \, (a+b) \; + \; R_C \, (b\text{-}c) \; = \; bP$$

Successivamente, prendendo C «per centro del moto e immaginando la piccola rotazione di discesa intorno ad esso» formula il seguente ragionamento: «Si rileva che non è astretto ceder che l'appoggio A, e che l'altro B rimane nella sua posizione, e sollevato per fino d'essere in contatto col corpo nel punto B: sicché essendo in tale supposizione attivo per l'equilibrio del corpo l'appoggio A, e indifferente l'esistenza dell'altro B, avremo l'equazione:

$$R_A \, (a \; + \; c) \; = \; cP \text{ »} \; [25]$$

24. P. Paoli, *Nuove considerazioni...* cit., p. 64.
25. Ibidem, p. 69.

Ragionamento oscuro, senza dubbio, e tale da rasentare una «petizione di principio», come osserverà Pietro Paoli. Tuttavia la [5] inaugura — per dir così — una lunga serie di equazioni proposte dai diversi ricercatori per colmare la «lacuna» delle leggi generali della statica.

Nello stesso tomo VIII delle citate «Memorie della Società Italiana» entra in scena un problema concettualmente analogo a quello degli appoggi, anch'esso destinato ad animare una *querelle* che si protrarrà per più di cinquant'anni: è il problema dei *cardini di una porta* proposto da Gregorio Fontana [26]. Si tratta nuovamente di un caso staticamente indeterminato già per due cardini, se l'asse di rotazione della porta è verticale. Gregorio Fontana perviene appunto all'indeterminazione delle componenti verticali delle reazioni; tuttavia egli accoglie nel proprio saggio anche una soluzione a lui comunicata da Lorenzo Mascheroni dove tali componenti sono ingannevolmente determinate per via statica. La questione sarà ripresa da Giuseppe Venturoli nei suoi *Elementi di Meccanica* e da Gabrio Piola nella memoria *Sull'applicazione dei principii della Meccanica Analitica di Lagrange* (...) premiata dall'Istituto Milanese nel 1824, entrambi a sostegno dell'indeterminazione; al contrario, G.B. Masetti, nelle sue *Note ed Aggiunte agli Elementi di Meccanica del Sig. Venturoli* (1827) riproporrà la tesi del Mascheroni. Infine interverranno con decisivi chiarimenti in proposito G. Barsotti [27] e soprattutto O. F. Mossotti [28], il quale mostrerà come tale problema sia riconducibile a quello degli appoggi, prestandosi alla medesima tecnica risolutiva.

Infine, per la terza volta, le «Memorie della Società Italiana» ospitano nel Tomo VIII un tentativo — l'ultimo del secolo XVIII — per la soluzione del discusso enigma. Ne è l'autore Gian Francesco Malfatti, un matematico di notevole levatura, nato ad Ala di Rovereto e vissuto tra il 1731 e il 1807 [29]. Al nostro tema Malfatti dedicò tre memorie pubblicate rispettivamente nel 1799 nel 1803 e nel 1805 [30]; della prima soltanto però merita parlare, cercando di estrarre gli elementi essenziali dalle novantasei pagine che compongono il lavoro così intricato e digressivo da scoraggiare il più volenteroso dei lettori. Dopo aver accerta-

26. G. Fontana, *Sopra la pressione delle porte contro i loro arpioni*, Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, *8, 1,* 1798 (1798), pp. 135-139.

27. G. Barsotti, *Degli sforzi che fanno i punti di sostegno d'una porta per reggerla in equilibrio, qualunque ne sia il numero e la posizione.* Annali di Fis. Chim. e Matem., *8,* 1842, pp. 146-154.

28. F. Mossotti, *Lezioni di Meccanica Razionale,* Pisa, 1858, p. 99.

29. Cfr. gli Atti del Convegno: «*Gianfrancesco Malfatti nella cultura del suo tempo*», Ferrara 1981; in tali Atti, di particolare interesse per noi è la comunicazione di S. Di Pasquale: *Gianfranco Malfatti e il problema degli appoggi*, pp. 253-264.

30. G.F. Malfatti, *Tentativo sul problema delle pressioni che soffrono gli appoggi collocati agli angoli di una figura, derivate da un peso posto dentro la sua aja.* Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, *8, 2,* 1799, pp. 319-415; *Brevi riflessioni alla critica del tentativo pel problema delle pressioni, fatta dal sig. Paoli nel t. IX di questa Società*, Ibidem, *10, 1,* 1803, p. 245; *Appendice al problema delle pressioni*, Ibidem, *12, 1,* 1805, p. 100.

ta l'indeterminazione statica del problema in generale, l'autore avanza la sua ipotesi di fondo: «Per rimuovere quest'inciampo, perché non richiamerem noi in soccorso l'assioma fisico, che le operazioni della Natura, posta in circostanze per ogni verso eguali, sono eguali?» [31]. Ecco il nocciolo dell'argomento: vero è che in base alle leggi della statica, le reazioni di appoggio sovrabbondanti sono indeterminate; tuttavia non per questo possono essere assegnate ad arbitrio. Quale che sia la legge che le governa, essa dev'essere tale da produrre «pressioni» uguali quando i punti d'appoggio siano disposti secondo un poligono regolare e il carico sia centrato. In questo caso infatti il «principio di ragion sufficiente» riesce a rimuovere l'indeterminazione lasciata dalle leggi della statica: se però si pretende che *la sola applicazione delle leggi della statica* basti a produrre il risultato indubitabile dell'uguaglianza delle «pressioni», allora *è necessario supporre* che nel caso di un poligono d'appoggio regolare con carico centrato il corpo sia assimilabile ad un opportuno sistema di leve il cui equilibrio richieda necessariamente forze uguali nelle estremità corrispondenti agli appoggi.

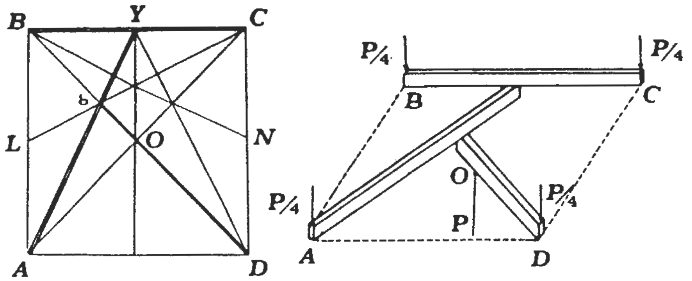


Fig. 11

Ad esempio, per un corpo quadrato soggetto al carico P nel centro O e poggiante su un piano orizzontale nei vertici $A\ B\ C\ D$, il sistema di leve che esige forze uguali in $A\ B\ C\ D$ affinché sussista equilibrio è costituita dalla «leva primaria» $D\delta$ e dalle «leve comunicanti» $A\,Y$, BC rappresentate in fig. 11. Passando ora dal poligono regolare a quello generico e dal carico centrato a un carico comunque disposto, Malfatti ritiene plausibile l'ipotesi che un «analogo» sistema di leve possa assolvere al medesimo ufficio, rimuovendo l'indeterminazione statica. Il problema sta nel ravvisare i termini dell' «analogia»: e qui l' «intralciato labirinto» seguito dall'Autore diventa vieppiù insidioso. Si consideri ad es. il quadrangolo $A\ B\ C\ D$ caricato in O da $P = 1$ della fig. 12.

31. Ibidem, p. 324.

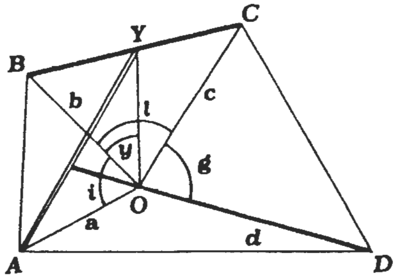


Fig. 12

Immaginando un sistema di leve «primarie» e «comunicanti» analogo a quello del quadrato resta comunque incognita la posizione di Y ovvero il valore da assegnare all'angolo y. Il valore delle reazioni dipende da y secondo la:

$$R_A = \frac{1}{D} (bcd \; senl \; sen(g+l+y)) \qquad e \; analoghe, \qquad [6]$$

dove $D = R_A + R_B + R_C + R_D$. D'altra parte, per il triangolo ABC l'espressione di R_A (per $P = 1$) è

$$R_A = \frac{bc \; senl}{ab \; seni - ac \; sen(i+l) + bc \; senl}$$

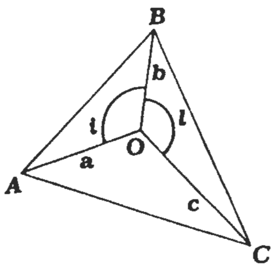


Fig. 13)

ossia, il binomio bc al numeratore è moltiplicato per l'angolo l compreso tra i lati di lunghezza b e c. Ebbene, l'«analogia» suggerisce a Malfatti di affermare che nel quadrangolo il trinomio bcd al numeratore della [6] debba essere dunque moltiplicato per la somma $sen\,l + sen\,g + sen(l+g)$ essendo l, g, $l+g$ gli angoli compresi tra i lati di lunghezza b, c e d. Le reazioni prendono allora la forma «congetturale» (come dice l'autore):

$$R_A = \frac{1}{S}(bcd \; [senl + seng + sen(l+g)]) \qquad e \; analoghe \qquad [7]$$

dove $S = R_A + R_B + R_C + R_D$. Il confronto tra [6] e [7] dà ovviamente notizie sull'angolo incognito y. Il risultato così ottenuto trae poi «conferma» dalla verifica che esso comprende come casi particolari i risultati noti per la figura regolare.

Per quanto inaccettabile o comunque arbitraria sia la trattazione, non si può disconoscerne la genialità. Malfatti ha saputo percorrere con ammirevole perizia l'antico sentiero tracciato da Archimede per la dimostrazione della legge della leva: partir cioè da un esempio «metafisicamente» risolto dal principio di ragion sufficiente per emarginare tale principio, affidando alle leggi fisiche il compito di rappresentarlo adeguatamente. Che poi quell'antico sentiero sia periglioso e deludente è altra questione. C'è di più: il criterio dell'«analogia» usato da Malfatti — certo in misura eccessiva — non può esser respinto a cuor leggero. Buona parte delle maggiori scoperte scientifiche è scaturita dall'inconfessabile convinzione che la Natura persegua un suo disegno di semplicità; non soltanto col risparmio dei suoi sforzi o con la scelta delle vie più corte secondo le intuizioni di Fermat e di Maupertuis, ma anche col variare «il meno possibile» la struttura formale delle sue leggi. È assai probabile che Malfatti proprio a questo pensasse nel corso del suo lavoro; ne è testimonianza un'enigmatica frase da lui posta nel paragrafo introduttivo, che forse è la chiave segreta dei suoi intenti: «Se io non vado errato ne' miei raziocinj, i quali sottopongo all'esame e alla decisione degl'Intendenti, mi compiacerò della mia fortuna nell'aver incontrato quel metodo che possa esser considerato come equivalente all'economia e al magistero della Natura nella distribuzione delle sue forze» [32].

Possiamo idealmente concludere la storia del dibattito settecentesco sul problema degli appoggi menzionando un lavoro che già appartiene al nuovo secolo; è il saggio polemico e sbrigativo di P. Paoli, pubblicato nel Tomo IX delle «Memorie della Società Italiana» [33]. Basta con i ragionamenti contorti e capziosi tendenti a distinguere tra «pressioni» d'appoggio e forze! sembra esclamare l'Autore. «Il sommo Geometra Lagrange con la più evidente e rigorosa metafisica ha generalmente dimostrato nella sua Meccanica Analitica, che si potevano in ogni caso sostituire alle pressioni eguali forze attive in senso contrario» [34]. Ciò costringe ad ammettere finalmente che il problema degli appoggi sovrabbondanti è indeterminato; ogni tentativo sinora compiuto per dimostrare il contrario, o è errato, o si fonda su ipotesi arbitrarie. Graffianti critiche sono rivolte a Delanges; la soluzione di Lorgna è appena citata con disprezzo; il lavoro di Malfatti è preso in maggior considerazione, ma non è difficile a Paoli denunciarne i gravi limiti. A proposito del sistema di leve ipotizzato da Malfatti l'obiezione è che la loro esistenza, seppur virtuale, non è affatto dimostrata; e a proposito del criterio di analogia l'obiezione è ancor più dura, quasi beffarda: infatti Paoli mostra come sia possibile seguire lo stesso criterio per giungere a una soluzione diversa. Ecco infine la conclusione: «Dopo i varj tentativi che sono stati fatti (...) mi confermo sempre più nella mia opinione; che, finché non sarà scoperto qualche nuovo principio di Statica, quelli, che finora si conosco-

32. Ibidem, p. 320.
33. P. Paoli, *Sul problema degli appoggi*, Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, 9, 1802 (1801), pp. 92-98.
34. Ibidem, p. 93.

no, saranno insufficienti a determinare le pressioni sofferte da più di tre appoggi, a meno che non si unisca ad essi qualche particolare supposizione» [35].

Sopravvivenza del vecchio dibattito nel secolo XIX

Se sbrigativo è il giudizio di Paoli che conclude il dibattito settecentesco, altrettanto deciso è il modo col quale l'enigma è rimosso nei grandi *trattati di Statica* che inaugurano il nuovo secolo. Così ad esempio L. Poinsot, nei suoi *Éléments de Statique* del 1803, interpreta l'indeterminazione statica insorgente nel problema degli appoggi sovrabbondanti per il corpo rigido come necessaria conseguenza dello stesso concetto di corpo rigido. «Gardons nous d'abord d'en conclure que la théorie connue jusqu'ici est insuffisante pour résoudre le problème en question; car nous allons voir que ce problème est indéterminé par l'hypothèse même que l'on a faite, et que la théorie donne tout ce qu'on peut demander sans se contredire» [36].

In altri termini, secondo Poinsot, l'enigma è sciolto se cessa d'essere inteso quale aporia della statica e diventa al contrario elemento connotativo di una certa classe di corpi descritti da due condizioni solidamente congiunte: l'indeformabilità geometrica e l'indeterminazione statica. Così anche Poisson, nel suo *Traité de Mécanique* del 1811 dichiara impossibile il determinare le reazioni nel corpo rigido iperstatico e rimuove il paradosso negando l'esistenza in natura di sistemi rigorosamente rigidi [37]. Così infine J. B. Labey, della scuola di Laplace, ritiene che l'indeterminazione non debba stupire, appartenendo alla natura matematica del problema statico [38].

Il vecchio dibattito sembra dunque destinato a spegnersi, anche perché — come vedremo — la ricerca sta prendendo altri orientamenti. In realtà si tratta soltanto in una sosta. Infatti, nel 1819 la questione rimbalza fuori d'Italia con una memoria di Bonnycastle presentata alla Royal Society dove di nuovo vien denunciata l'eventuale indeterminazione «analitica» e vien fatto appello a una sintesi «non matematica» che metta in conto le circostanze che accompagnano l'appoggio del corpo rigido su un piano. Nel 1821 la «Società Italiana» indice un concorso sul problema. Risorgono i due partiti, l'uno ostinato a dare una qualche soluzione, l'altro parimenti ostinato a smontarla. C'è poi il gruppo di chi s'accontenta ad attizzare il fuoco, stupendosi del paradosso. A questo grup-

35. Ibidem, p. 98.
36. L. Poinsot, *Elements de Statique*, Paris 1803, p. 151.
37. S. D. Poisson, *Traité de Mécanique*, Paris 1811 (1833), Livres III, 2 Partie, Ch. I pp. 523-525.
38. J.B. Labey, *Traité de Statique*, Paris 1812, p. 94-98.

po appartiene un anonimo *abbonato* agli *Annales* di Gergonne, che nel 1826/27 pubblica una nota dal titolo allarmato: *Sur un paradoxe de Statique*. «Quelques géomètres ont tendé de répandre un peu de jour sur cette question, en distinguant l'état physique de l'état mathématique, l'état concret de l'état abstrait; mais il est permis de douter qu'ils l'aient fait de manière à satisfaire pleinement les esprits exactes» [39]. Il nostro anonimo, infatti, ha in serbo un'obiezione che a lui appare vincente, insormontabile, benché per la verità non sia neppure un'obiezione: egli suppone che *CA* e *CB* siano due sbarre rigide incernierate in *C*, soggette a due pesi *P, Q* in *O, O'* (fig. 14); le reazioni sono date dalle:

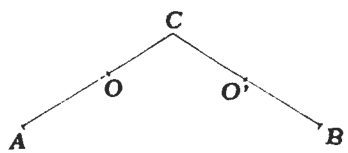


Fig. 14

$$R_A = P\frac{[CO]}{[AC]} \quad R_B = Q\frac{[CO']}{[BC]}$$

$$R_C = P\frac{[AO]}{[AC]} + Q\frac{[BO']}{[BC]}$$

che non dipendono dall'angolo $A\hat{C}B$, per cui valgono anche nel caso di tre appoggi allineati. Dove sta dunque l'indeterminazione che tutti riconoscono? «Il faut absolument ou bien faire à cette manière de raisonner une réponse décisive, ou bien se résigner è rejeter le principe de statique qui donne lieu au paradoxe dont il s'agit ici. Nous attendrons, sur cette alternative, l'opinion des juges compétens» [40]. Nel poscritto alla *Nota*, l'anonimo aggiunge un'osservazione che in seguito ricorrerà presso altri autori: posiamo in linea retta su un piano tre sfere pesanti, ognuna delle quali dà luogo a una reazione uguale e contraria al proprio peso; poi uniamole idealmente con sbarre rigide non pesanti, sì da formare un unico corpo rigido. Che cosa muta d'improvviso nel sistema onde intervenga l'indeterminazione?

Al primo partito — e cioè al partito di coloro che ritenevano d'aver trovato una soluzione — appartiene Ambrogio Fusinieri che nel 1832 pubblica presso gli *Annali delle Scienze del regno Lombardo Veneto* (fascicolo di settembre e ottobre 1832, p. 298 ss.) un lavoro vistosamente retrospettivo di pretto stile settecentesco: il problema dei quattro appoggi è risolto con lievi modifiche dei metodi di Lorgna e di Fontana, supponendo che i vincoli siano monolaterali. Dell'altro partito invece fa parte Pacifico Barilari, autore di una nota pubblicata a Pesaro nel 1833 dal titolo: «*Intorno un problema del Dottore Ambrogio Fusinieri sul modo di determinare le pressioni che esercita un grave sopra più di*

39. *Notes sur un paradoxe de Statique - Par un Abboné,* Annales de Mathématiques pures et appliquées, ... par J.D. Gergonne, *17*, 1826/27, pp. 75-79; p. 75.
40. Ibidem, pp. 77-78.

tre appoggi» dove, con argomenti simili a quelli di Paoli, vien dimostrato che la soluzione di Fusinieri è una tra le molte, ma non vi sono «ragioni bastanti per giudicare che la natura prenda piuttosto questa via di determinazione e non tante altre, che si possono immaginare senza incorrere in alcun assurdo».

Citiamo infine l'ultimo *sic et non* della nostra storia; ci riferiamo ai contributi di Francesco Bertelli e di Giuseppe Fagnoli accolti nel I e nel IV Tomo delle «Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna» [41]. Bertelli è un profondo conoscitore della letteratura sul tema degli appoggi staticamente indeterminati; numerose pagine della prima 1ª Parte e tutta la 2ª Parte del suo lungo saggio pubblicato postumo nel 1850, hanno infatti carattere storico. L'opinione dell'Autore è che la soluzione non può essere ottenuta senza l'aiuto della teoria dell'elasticità, rimuovendo cioè l'ipotesi del corpo rigido. Ma la «disparità di metodi e di soluzioni ipotetiche del problema» spinge Bertelli a tagliar corto con le trattazioni analitiche per affidare il verdetto all'esperimento; per questo egli descrive con grande cura un particolare tipo di dinamometro da lui stesso progettato «cui per ragione di comodità e d'uso, può darsi il nome, dalla greca favella derivandolo (...), di Piesimetro» (fig. 15).

Il lavoro successivo di Fagnoli merita forse qualche attenzione, poiché in esso si conclude l'itinerario iniziato con Euler per giustificare il *nuovo principio* da aggiungere alle leggi della statica, senza far diretto riferimento all'ipotesi di legame elastico. Anche Fagnoli conosce perfettamente la letteratura e le diverse posizioni dei maggiori scienziati, ma aggiunge: «a malgrado del rispetto grandissimo ch'io professo per le espressioni di quei sommi luminari della Scienza (...), m'è per forza il dire, che tanto la sentenza del Poisson e del Bertelli, quanto le proposte e i tentativi degli altri, mi sembrano immaturi e azzardati, non essendosi, a parer mio, ancora stabilito il problema sopra basi abbastanza chiare e distinte, né dirette le ricerche per quella logica via, che può sola dissipare le dubbiezze e condurre a qualche certa conclusione» [42]. Le basi chiare e distinte possono essere raggiunte — secondo l'Autore — solo se si comprende che la distribuzione delle pressioni esercitate da un sistema *rigido* su dati punti d'appoggio *irremovibili* non dipende soltanto dall'invariabilità della forma del sistema e dalla immobilità degli appoggi, ma deriva anche «da altre cause cooperanti alle suespresse, o anzi da cause in parte da quelle diverse». Riprendendo l'esempio delle tre sfere di cui aveva parlato l'anonimo degli *Annales* di Gergonne, Fagno-

41. F. Bertelli, *Ricerche sperimentali circa la pressione de' corpi solidi ne' casi in cui la misura di essa, secondo le analoghe teorie meccaniche si manifesta indeterminata*... Mem. Accad. delle Sc. dell'Ist. di Bologna *1*, 1850 (1843-44), pp. 433-461; G. Fagnoli, *Riflessioni intorno la teorica delle pressioni che un corpo o sistema di forma invariabile esercita contro gli appoggi rigidi ed irremovibili dai quali è sostenuto in equilibrio*. Ibidem, *4*, 1853 (1852), p. 109-138.

42. G. Fagnoli, *loc. cit.*, p. 113.

Fig.a 1.a

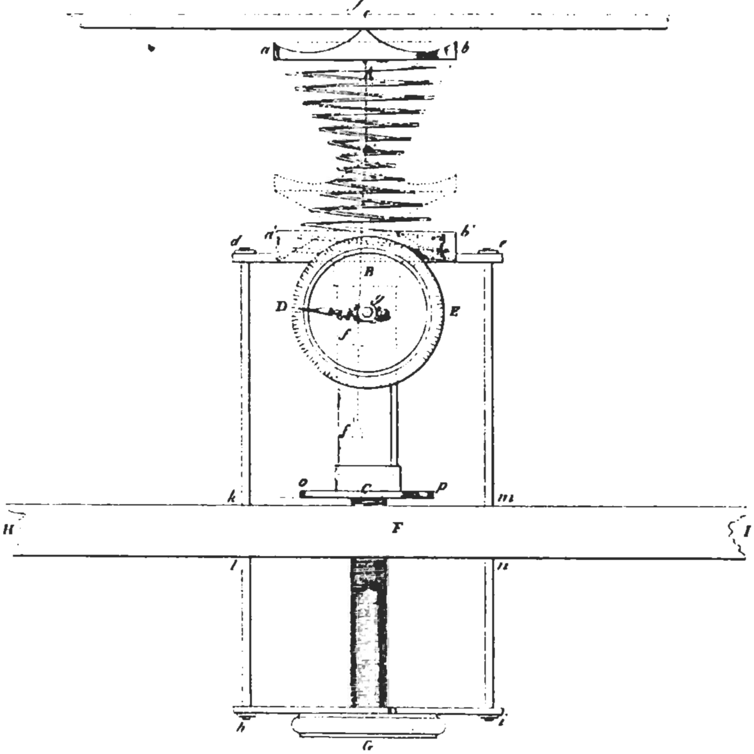
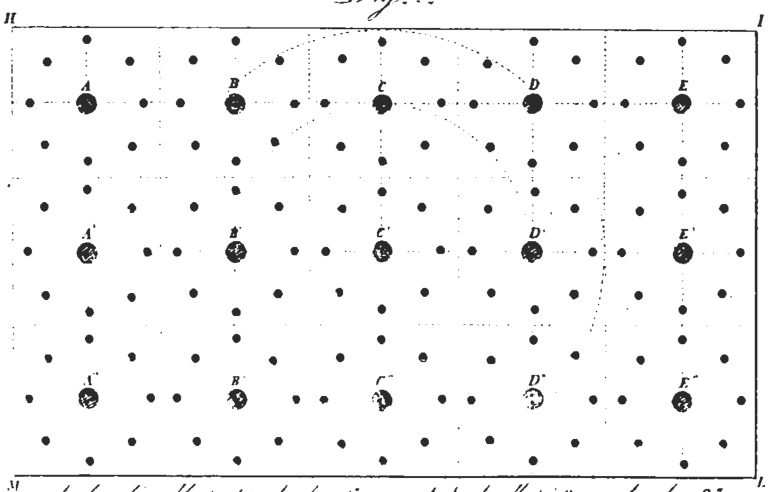


Fig.a 2.a



Scala di Metri 1 per la fig. 1.a Scala di Metri 2 per la fig. 2.a li indica appunto la ragione dell'indeterminatezza nelle «circostanze accessorie che accompagnano lo stabilimento dell'equilibrio»; la configurazione finale che nel caso rigido è prevedibile a priori non è infatti sufficiente a definire il problema poiché si può sempre immaginare che essa sia il risultato di una deformazione precedente, a partire da un'arbitraria configurazione iniziale [43].

Per «dissipare le dubbiezze», l'Autore tenta dapprima di definire il concetto di corpo rigido secondo una sua interpretazione dinamica; in breve (e sperando di aver inteso correttamente l'oscuro testo di Fagnoli), il corpo rigido sarebbe un insieme di punti tra loro «liberi e sciolti», dove però ogni punto esercita sugli altri *reazioni interne* atte a impedire qualsiasi moto relativo [44]. Orbene, se ci si limita a stabilire le condizioni di equilibrio del Sistema, basta tener conto soltanto *dell'eguaglianza* tra le forze attive e le forze reattive, «per lo che diviene lecito l'aggiunger nuove forze e nuove resistenze ad arbitrio, purché si serbi l'uguaglianza fra loro (...). Ma qualora si tratti d'indagare il modo di diffusione o distribuzione delle forze non è più permesso di prescindere dalla considerazione dell'assoluta *entità* delle reazioni interne» [45]. Infatti, per una data combinazione di forze attive, applicate a un sistema rigido, cui sia possibile far corrispondere diverse combinazioni di forze reattive equivalenti, muta di caso in caso la distribuzione delle *reazioni interne*. Ad esempio, nel problema degli appoggi su un piano, se si suppone che le reazioni d'appoggio seguano il principio di Euler, «ciascuna di essa imprimerà nel rispettivo punto una velocità virtuale, ossia la tendenza ad un moto iniziale, che non altera la posizione relativa dei punti stessi», sicché in tal caso le *reazioni interne* sono nulle; se invece quel principio è trasgredito, allora si deve ammettere che abbiano luogo alcune *reazioni interne* idonee ad assicurare l'invariabilità della forma del sistema. Ecco dunque la nuova interpretazione che Fagnoli propone per il principio di Euler: esso individua tra le infinite combinazioni di forze reattive che possono far equilibrio alla data forza pressante, quella sola che «non eccita alcuna reazione interna tra i punti del Sistema ai quali è applicata» [46].

L'ingegnoso — seppur incerto — tentativo di Fagnoli richiama l'analogo ragionamento usato da Mariano Fontana (1792) per presagire «dinamicamente» la regola del terzo medio nella statica degli archi. Troppo sbrigativo ci sembra al proposito il giudizio severo di K. Pearson («It seems to me utterly obscure and involves the strange metaphysical conception of internal reactions in 'perfectly rigid bodies' » [47]. Certamente oscuro e metafisico è il discorso di Fagnoli, ma

43. Ibidem, pp. 114-115.
44. Ibidem, pp. 121-122.
45. Ibidem, p. 124.
46. Ibidem, p. 130.
47. I. Todhunter, K. Pearson, loc. cit., II, *1*, p. 350.

ha dalla sua una remota tradizione: dall'originaria trattazione «aristotelica» per la legge della leva, alla sottile analisi sulla radice dinamica del concetto di forza.

Introduzione alle nuove vie del secolo XIX

Il contributo di Fagnoli è l'ultimo del vecchio stile. In realtà, sin dai primi decenni del secolo XIX, altre più promettenti vie son venute maturando. La lezione di Lagrange è ormai diffusamente appresa dai ricercatori più avveduti: la forza (in particolare, la forza reattiva) può allentare il suo diretto collegamento con i concetti «classici» di «causa del moto» o di «causa della deformazione» essendo anche definibile in termini strettamente matematici quale moltiplicatore di una condizione appesa alla equazione dei lavori virtuali. Sarebbe dunque assurdo temere che venga meno il principio deterministico giammai contraddetto in fisica se per avventura accade che la fragile larva di un moltiplicatore lagrangiano resti talvolta indeterminabile. Questo è il messaggio offerto da Gabrio Piola in uno splendido lavoro del 1824 premiato dall'Imperial Regio Istituto di Scienze in Milano. Nell'*Osservazione* introduttiva al capitolo «Problema di Equilibrio», dove le equazioni cardinali della statica son dedotte dal principio dei lavori virtuali, il Piola scrive: «Si è già notata l'indole differente delle questioni di dinamica e di statica, delle quali ultime si cerca nondimeno la soluzione appoggiandosi alla stessa equazione generale. Nelle prime ciò che si cerca essendo le coordinate dei diversi punti, si hanno sempre tante equazioni quante sono le quantità da determinarsi, né l'esservi delle equazioni di condizione distrugge il qui asserito, perché, quantunque trattando queste col metodo dei moltiplicatori si introducano delle indeterminate di più: le equazioni stesse aggiungendosi a quelle che risultano dalla formula generale, danno sempre quel numero di equazioni che si richiede a determinare tutte le incognite. Non così nelle equazioni di equilibrio in cui ciò che si cerca sta nelle relazioni tra le forze; egli è ben chiaro che se vi sono delle equazioni di condizione fra le coordinate, vengono introdotte delle indeterminate di più, e le equazioni stesse non possono servire a determinare le incognite, supponendo che queste siano le forze. Non è quindi da stupirsi se in molti problemi di equilibrio si ha tra le incognite un non sufficiente numero di equazioni: è la natura stessa delle questioni che rende tali problemi indeterminati» [48].

48. G. Piola, *Sull'applicazione de' principj della Meccanica del Lagrange ai principali problemi*. Memoria presentata al Concorso del Premio e coronata dall'I.R. Istituto di Scienze nella solennità del giorno 4 ottobre 1824. Milano, 1825, pp. 77-78.

Questo passo è veramente notevole: l'assoluta chiarezza del metodo lagrangiano elimina ogni sospetto di «paradosso» nel problema degli appoggi, mostrando che l'eventuale indeterminazione delle forze reattive non ospita alcun significato fisico conturbante. D'altra parte, lo stesso concetto di forza perde molto della sua immediatezza intuitiva; quel che è immediato sono soltanto «le condizioni fra le coordinate», ovvero i dati della geometria (o della cinematica). La forza invece resta, per dir così, «schermata» dal procedimento matematico entro il quale essa appare dapprima al modo di moltiplicatore, e cioè sotto l'aspetto di uno strumento formale utile al calcolo. Tale interpretazione riduttiva farà strada durante il secolo XIX, animerà un progetto scientifico ed epistemologico di vasta portata tendente a escludere la forza dai concetti primitivi della meccanica. «Il est bien possible — dirà Saint Venant nel 1866 — que les forces, ces sortes d'êtres problématiques, ou plutôt d'adjectifs substantisés, qui ne sont ni matière ni esprit, êtres aveugles et incoscients et qu'il faut donner cependent de la merveilleuse faculté d'apprécier les distances et d'y proportionner ponctuellement leur intensités, soient de plus en plus expulsées et ecartées des sciences mathématiques» [49].

Nello stesso anno 1825 in cui fu pubblicato il risolutivo saggio di Piola, uscì nel *Bulletin des Sciences par la Société Philomatique di Paris* una nota di Louis Navier altrettanto risolutiva sul versante delle applicazioni. Secondo K. Pearson, Navier «seems to have been the first to notice that problems relating to reactions, for the determination of which elementary statics does not provide sufficient equations, are perfectly determinate when account is taken of the elasticity of the reacting bodies» [50]. In realtà una simile osservazione era stata già compiuta da diversi altri autori; ma il merito indiscutibile di Navier sta nell'aver condotto a termine l'analisi sia nella memoria qui citata [51], sia nel più celebre *Résumé des leçons données à l'Ecole royale des ponts et chaussées* edito l'anno successivo.

Il riferimento all'elasticità rappresentava in quegli anni il tema più promettente non soltanto per la straordinaria efficacia applicativa e per la rigorosa sintesi che la nuova teoria riusciva a realizzare, ma anche per il profondo significato che sembrava esser racchiuso nei principi e nelle equazioni generali. L'interpretazione molecolare del comportamento elastico dei corpi, promossa da Navier, da Cauchy, da Poisson, sollecitava grandi speranze di poter finalmente unificare e spiegare «tutte le forze operanti nella Natura» alla luce della legge universa-

49. Cfr. R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Neûchatel, 1950, p. 421.

50. I. Todhunter, K. Pearson, *A History of the Elasticity I*, Cambridge, 1886, p. 146.

51. L. Navier, *Sur des question de statique dans lesquelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui surpassant trois*. Bull. des Sc. par la Société Philomatique, 1825, p. 35.

le dell'attrazione e della repulsione inter-atomica che già R.G. Boscowich aveva presagito. Dagli ammassi stellari sui quali opera l'attrazione newtoniana, agli aggregati delle molecole di un corpo sul quale operano le forze di «coesione», tutto appariva esser governato dal medesimo principio. In questo orientamento è di preminente interesse l'opera scientifica di Ottaviano Fabrizio Mossotti il cui saggio «*Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, aperçu pour servir à la determination de la cause et des lois de l'action moléculaire*» pubblicato a Torino nel 1836 e presentato da Faraday nel 1837 al Royal Institution, persegue l'ambizioso obiettivo di raccogliere ad unità tutte le forze naturali (dalla gravitazione universale all'azione molecolare, alla «forza repulsiva del calorico», alle forze elettriche, all'azione dei corpi sulla luce) mediante lo studio dell'«azione combinata dell'attrazione colla ripulsione fra due o più sostanze». In particolare, Mossotti arricchisce il modello di Boscowich mettendo in conto, come «parte integrante dell'equilibrio stabile» dei corpi anche l'azione dell'*etere*, di quel «fluido impoderabile — cioè — al quale possono essere attribuiti i fenomeni dell'elettricità e del calore».

Entro una simile visione, le leggi costitutive dell'elasticità non si pongono affatto come descrizione di una limitata classe di corpi, non indicano una partizione del campo dei corpi possibili, ma esprimono, se così si può dire, una proprietà «ontologica» che connota il corpo in quanto corpo.

Ebbene, la via nuova tracciata da George Green che tanto strettamente si intreccerà alla nostra storia, si presenta con una analoga latitudine di intenzioni. Il celebre saggio da lui letto nello stesso 1837 presso il Cambridge Philosophical Society [52] riguarda ancora l'etere, l'impoderabile sottile materia che, secondo le opinioni scientifiche di quel tempo, dovrebbe avvolgere l'intero cosmo. Tuttavia, a differenza di Cauchy e degli altri autori che vedevano nell'etere «a system of molecules acting on each other by mutually attractive and repulsive forces», Green preferisce schivare i rischi di un modello così inverificabile. «We are so perfectly ignorant of the mode of action of the elements of the luminiferous ether on each other, that it would seem a safer method to take some general physical principle as the basis of our reasoning, rather than certain modes of action». Il principio usato dall'Autore è che «in whatever way the elements of any material system may act upon each other, if all internal forces exerted be multiplied by the elements of their respective directions, the total sum for any assigned portion of the mass will always be the exact differential of some function» [53].

52. *G. Green, On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common Surface of two non-crystallized Media,* (Trans. of the Canbridge Phil. Soc., 7, 1839, pp. 1-24); Mathematical Papers of the late George Green, London 1871, pp. 243-269.

53. Ibidem, p. 243.

Si noti l'assoluta generalità di questa proposizione che, stando alla lettera, riguarda «any material system». Certo, non avrà torto Castigliano a considerar con un qualche riserbo il principio di Green, riconoscendo in esso un'ipotesi ben fondata sull'esperienza e plausibile, ma nulla più; tant'è vero che le dimostrazioni da lui date al teorema di minimo del lavoro di deformazione sono sempre duplici, a dispetto della prolissità: un primo argomento verte sui «sistemi articolati», ai quali è chiaramente riferibile il concetto di elasticità secondo Navier, Poisson, Cauchy, Mossotti, ed è da Castigliano ritenuto certo e rigoroso; un secondo argomento verte sugli altri sistemi, per i quali, egli dice, «la questione è più complicata a cagione dell'ignoranza in cui noi siamo intorno alla costituzione molecolare», ed è tratto dal principio di Green. Sul rigore di questa seconda dimostrazione, indubbiamente più stringata ed elegante, Castigliano però non si pronuncia, quasi la valutasse una via d'uscita provvisoria da offrire in mancanza di meglio [54].

Non c'è dubbio invece che Green attribuiva al suo principio un ruolo fondamentale nell'intera teoria fisico-meccanica, consentendo l'applicazione dei metodi lagrangiani e conducendo addirittura alle equazioni di Navier per via strettamente deduttiva. Posto infatti che per un sistema materiale valga l'equazione:

$$\Sigma\, Dm \left\{ \frac{d^2u}{dt^2}\, \delta u + \frac{d^2v}{dt^2}\, \delta v + \frac{d^2w}{dt^2}\, \delta w \right\} = \Sigma\; Dv \cdot \delta\phi$$

dove u, v, w sono le componenti di spostamento della particella il cui volume e la cui massa elementari sono Dm e Dv, e dove $\delta\phi$ è il differenziale esatto di una funzione delle sei componenti di deformazione infinitesima, Green ritiene matematicamente ovvio il poter «expand ϕ in a very convergent series of the form $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \ldots$, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, etc. being homogeneous functions of the quantities $a, \beta, \gamma, s_1, s_2, s_3$, [deformazioni angolari e lineari] of the degrees 0, 1, 2, etc. each of which is very great compared with the next following one» [55]. È poi agevole riconoscere che i termini ϕ_0, ϕ_1, possono essere cancellati e i termini ϕ_3, ϕ_4, ... sono trascurabili rispetto a ϕ_2 «provided the whole system be perfectly free from all extraneous forces, and subject only to its own molecular actions». A questo punto l'Autore aggiunge: «If now we can obtain the value of ϕ_2, we shall only have to apply the general methods given in the *Mécanique Analytique*. But ϕ_2 being a homogeneous function of six quantities of the second degree, will in its most general form contain 21 arbitrary coefficients» [56].

54. Cfr.: A. Castigliano, *Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici*, Atti R. Accad. delle Sc. di Torino, *11*, 1875, p. 132.
55. G. Green, loc. cit., p. 249.
56. Ibidem, p. 250.

Seguono diverse specificazioni di ϕ_2 in casi più particolari sino a quello del corpo isotropo, dove i coefficienti si riducono a due.

Tralasciando di menzionare la grande controversia sulle costanti elastiche che questo straordinario testo di Green ha generato, limitiamoci a due osservazioni: 1) quello sviluppo in serie di ϕ appare a Green una semplice elaborazione formale, mentre in realtà esso racchiude una forte incidenza fisica; illuminante a questo proposito, è la critica di K. Pearson [57]. 2) Nella trattazione sopra richiamata i coefficienti elastici nascono concettualmente prima delle tensioni; per cui *non è riconosciuto* alcun ruolo significativo a una formula di «legame costitutivo» stress-strain del tipo:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} \qquad [8]$$

che Green nemmeno scrive e che probabilmente gli sembrerebbe una pura definizione nominale.

In certo senso possiamo concludere dicendo che da Green «tutto è scoperto» — esplicitamente o meno — ma nulla è ancor «riconosciuto» nel suo autentico significato. L'itinerario che s'offre ai successori è quello appunto di un progressivo riconoscimento delle ricche conseguenze che dall'impostazione di Green possono essere tratte. Sotto questo profilo, determinante è il saggio di William Thomson del 1857 pubblicato presso «The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics» [58], dove l'ipotesi del differenziale esatto è dimostrata nell'ambito della termodinamica per trasformazioni isoterme governate dal «second Fundamental Law of the Dynamical Theory of Heat», ed è come in Green attribuita estensivamente «to any kind of matter» [59]. Thomson si sofferma a lungo su formule analoghe alle [8] deducendo da esse le indicazioni relative ai coefficienti elastici; è chiaro che nelle [8] si esprime compiutamente almeno uno dei teoremi di Castigliano «sulle derivate del lavoro di deformazione». Tuttavia, resta, crediamo, una differenza. In Thomson, la forza interna (o meglio, la tensione) è ancora una grandezza *derivata*, connessa alla geometria della deformazione quasi per definizione: quel programma cui s'è dinnanzi accennato per «bandire» la forza dai concetti primitivi della meccanica è almeno parzialmente realizzato. Ebbene, l'originalità dei successivi *riconoscimenti* si ricollega invece a un'altra linea scientifica, o piuttosto epistemologica, tendente a dotare la statica di piena autonomia rispetto alla cinematica, attribuendo quindi al concetto di forza un rango non subordinato. Secondo questa linea, cioè, la statica e la ci-

57. Todhunter, K. Pearson, loc. cit., *1*, pp. 501-502.

58. W. Thomson, *On the Thermo-elastic and Thermo-magnetic Properties of Matter*, Quart J. of Pure and Appl. Math., *1*, 1857, pp. 57-77.

59. Ibidem, p. 63.

nematica si fronteggiano nell'armonia delle loro corrispondenze formali, da paro a paro, poiché sia l'una sia l'altra riguardano *enti* definibili o intelligibili in sé. Di qui nascerà l'impostazione che oggi ci appare più chiara, con la cinematica e la statica trattate separatamente e successivamente ricongiunte in virtù di un appello a ulteriori principi d'ordine sperimentale come, ad esempio, le equazioni costitutive.

Il Filosofo che ha capito tutto

Dobbiamo francamente riconoscere che la vera svolta risolutiva, quella che non tanto sciolse il problema degli appoggi, ma piuttosto aprì la strada della moderna meccanica strutturale, è dovuta a un ben strano, quasi misterioso personaggio, a un filosofo i cui pensieri vagavano oltre ogni confine disciplinare, invadendo l'economia politica, la statistica, le dottrine del probabilismo filosofico, le scienze della vita, l'epistemologia, la storia e la storiografia. A lui senza dubbio rimonta «il teorema del minimo lavoro in tutta la sua generalità», come ebbe ad avvertire malvolentieri Castigliano, il quale, nella 1ª Memoria del 1875, tentò di sminuirne la trattazione con argomenti non del tutto obiettivi. E a lui soprattutto può esser riferita quella diversa lettura alla meccanica cui s'è fatto cenno alla fine del paragrafo precedente, dove la statica prende corpo quale disciplina in sé, parallela e non subordinata alla cinematica.

Il nostro filosofo entrò nella storia qui narrata nascondendo il proprio nome: solo un'enigmatica sigla, «A.C.», apposta al termine di due straordinari lavori del 1827 e del 1828 pubblicati nel Bollettino del barone Férussac. Oscuro negli intenti, oscuro nell'identità, egli restò alquanto estraneo alla comunità scientifica dei meccanici, per lungo tempo; tant'è che ancor nel 1870 il Generale Menabrea, scrivendo al Conte Federigo Clopis presidente dell'Accademia di Torino, riteneva che A.C. celasse il nome di Augustin Cauchy, e la stessa opinione fu formulata da G. Barsotti in una lettera a Menabrea del 1869, mentre O.F. Mossotti nelle sue *Lezioni di Meccanica Razionale* del 1858 aveva lasciato anonimo l'autore. Poi la questione fu chiarita: A.C. sono le iniziali di Augustin Cournot. Ma chi era costui? Ai cultori della meccanica la sua memoria dice poco; in *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, E. Mach neppure lo cita; altrettanto fa R. Dugas nella sua *Histoire de la Mécanique*; Y. Elkana, M. Jammer, M.B. Hesse ed altri più recenti storici, dediti all'esame critico dei concetti della meccanica cui Cournot dette notevole contributo, lo ignorano. Ben diversa è invece l'accoglienza della sua opera tra i filosofi: la *Revue de Métaphysique et de Morale* gli dedicò un numero speciale nel 1905; F. Mentré ne studiò l'opera interpretandola secondo l'orientamento dello spiritualismo cristiano in un grosso volume del 1907; alcuni storici ne accentuarono gli spunti in favore del vitalismo (J. Second 1910, J. Rostand 1953, E. Callot 1959); altri lo collocarono quale esponente del probabilismo filosofico (F. Mentré 1908, D. Darbot 1910, G. Milhaud 1911, F. Redi 1934, J. De La Harpe 1936, E. Rocchi 1967); altri ancora ne valorizzarono gli apporti all'economia e alle scienze sociali (R. Ruyer 1930, F. Bompaire 1931, P. Taviani 1940). «La philosophie hautement empirique» di A. Cournot (com'ebbe a chiamarla G. Sorel in un articolo commemorativo del 1911) fu oggetto di un'analisi attenta all'intreccio costante tra filosofia e scienza nonché alle preziose notazioni epistemologiche sulla meccanica, pubblicata nel 1942 da Bruno Caizzi [60].

Non c'è dubbio: in ogni campo Cournot si rivela un autentico precursore le cui idee sono destinate a dar frutto assai più tardi rispetto alla loro prima apparizione. Naturalmente qui dobbiamo limitarci ad un semplice cenno sui risultati relativi alla meccanica che trovano espressione nelle note del 1827 e 1828 e che sono richiamati nel *Traité* del 1861. La nota del 1827 verte su un tema apparentemente diverso da quello degli appoggi o dei sistemi staticamente indeterminanti; il titolo è *«Sur les percussions entre deux corps durs, qui se choquent en plusieur points»* (Bull. des Sciences math. astron., phys. et chim. du Baron de Férussac, 1827, pp. 4-11). Si tratta del problema dell'urto tra due corpi rigidi quando il numero dei punti di contatto sia maggiore di 6. È l'esatto simmetrico del problema degli appoggi sovrabbondanti del corpo rigido su un piano; «pour

60. Augustin A. Cournot (1801-1877) si educò in campo scientifico studiando matematica, fisica, meccanica, chimica e astronomia; seguì i corsi di Laplace all'Académie des Sciences, strinse amicizia alla Sorbona con Dirichlet, frequentò i maggiori scienziati, come Ampère, Poisson, Cauchy. Precettore per un decennio presso il Maresciallo Gouvion, proseguì tuttavia le sue ricerche matematiche e fisiche che lo condussero a pubblicare le sue prime memorie tra il 1826 e il 1831 nel Bulletin del Barone de Férussac; si addottorò in scienze nel 1829 con due monografie, l'una riguardante appunto il nostro tema, l'altra relativa alla meccanica celeste. Agli interessi specifici dello scienziato si univano in Cournot quelli per la riflessione filosofica e lo studio delle scienze umane: è significativo che nel 1827 egli avesse conseguito la licenza in diritto. Le prime grandi opere apparvero nel 1838 e nel 1843 e riguardarono rispettivamente le *«Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses»* e l' *«Exposition de la théorie des chances et des probabilités»*. Il primo di questi trattati segna una data importante nella storia dell'Economia teorica poiché «è il primo tentativo franco e serio di applicare la matematica alla scienza economica» (L. Walras, 1873). L' *«Exposition...»* è in certo modo parallela ai lavori di Poisson sulla teoria della probabilità e pone Cournot tra i massimi fondatori del probabilismo ottocentesco, secondo una lettura rigorosa — ripresa ad es. da J. S. Mill — che non esclude la fedeltà ai principi della spiegazione scientifica e «deterministica» della natura. Del 1851 è l'opera *«Essai sur les fondaments de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique»* dove sono tracciate le linee di un criticismo scientifico veramente anticipatore dell'epistemologia che si svilupperà verso la fine del secolo XIX. Ma particolare interesse per noi presenta il cospicuo trattato del 1861, *«Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire»* per l'interpretazione ivi formulata sui principi della statica e della meccanica. Il *Traité* delinea il complesso orientamento vitalistico dell'autore, in un sistema comprensivo d'ogni scienza e conoscenza. Di notevole significato per la storiografia francese sono infine le *«Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes»* del 1868.

une application facile du principe de D'Alembert», Cournot perviene alla conclusione che: «lorsque le nombre des points de choc est plus grand que 6 (...) on a toujours ce qu'il faut pour déterminer tous les éléments du mouvement après le choc» ma restano indeterminati «les valeurs individuelles des percussions N, N_1 etc. souffertes par chacun des points de choc: c'est à dire, qu'au moyen de la supposition qu'on a fait de deux corps parfaitement rigides, ces percussions peuvent être sensées réparties diversement sur chacun des points de choc, sans que les éléments du mouvement des deux corps après le choc en soient changés, pourvu que (...) le résultante des percussions et leur couple résultant restent les mêmes» [61].

Dunque, anche nella meccanica dell'urto sorge il medesimo paradosso che s'incontra in statica. Vero è che nell'un caso e nell'altro l'elemento generatore del paradosso è l'ipotesi del corpo rigido, sicché sembrerebbe ragionevole uscirne adottando la soluzione di Poinsot affermando cioè che i corpi rigidi non esistono. «Mais cela lève-t-il la difficulté mathématique? — domanda Cournot — Nous osons penser que non, malgré le respect que doit inspirer l'autorité de ce célèbre géomètre (Poinsot), qui a particulièrement médité sur la philosophie des sciences exactes». Ora, questa filosofia — aggiunge l'Autore — è soggetta a variare: ai tempi di Descartes e di Leibniz si voleva riportare tutta la dinamica a fenomeni d'urto tra parti di materia impenetrabili e rigidi; questi fenomeni erano i soli ad esser ritenuti intelligibili, mentre le forze a distanza, come l'attrazione newtoniana, erano relegate tra le cause occulte. D'Alembert fu il primo che segnalò quanto oscura fosse anche l'idea d'impulso. L'indeterminazione sopra riscontrata è un'ulteriore prova che l'urto tra corpi rigidi produce le stesse difficoltà che si riscontrano nella statica e non gode perciò di quella chiarezza che Descartes e Leibniz vi riconoscevano.

Resta la questione sull'esistenza o meno del corpo rigido: ma essa non è pertinente, poiché comunque si tratta «d'une conception mathématique aussi claire que celles d'un cerche ou d'un carré parfait» raggiungibile per un consueto passaggio al limite dai corpi naturali: «donc à la limite, par analogie avec le phénomène perpetuellement observé en mathématique, la rigidité devenant parfaite, les percussions individuelles obtiendront une valeur limite, qui n'est que masquée, à la manière d'un coefficient differentiel, par une indétermination apparente» [62].

Il nostro Castigliano riprenderà l'argomento, con riguardo ai sistemi articolati (cfr. ad es. la prima memoria del 1875, pp. 32-33) giungendo a un'importante conclusione: «vedesi che ciascuna (delle tensioni nelle verghe) sarà espres-

61. A. Cournot, *Sur les percussions...*, Bull. de Férussac 1827, p. 8.
62. Ibidem, p. 10.

sa dal rapporto di due funzioni omogenee del grado 3n - 6 rispetto ai coefficienti (elastici) ϵ_{pq}, e perciò dipenderà soltanto dai rapporti tra questi coefficienti e non punto dai loro valori assoluti». Di qui segue che il determinare il limite corrispondente all'ipotesi di corpo rigido è, secondo Castigliano, banale e inconseguibile a un tempo: è inconseguibile se si pretende che la condizione di rigidità basti a determinare un'unica soluzione; è banale se si associa un particolare corpo rigido per ogni assegnato corpo elastico, rispettando i «rapporti tra i coefficienti». Il sentiero già chiaramente prefigurato da Castigliano riemergerà a distanza di quasi un secolo, possiamo dire, nei nostri giorni; «nulla va perduto nella storia», appunto, come si disse nel paragrafo introduttivo! Recentemente Giuseppe Grioli ha riproposto il tema in tutt'altro contesto e con diverso linguaggio [63]; ancor nel presente anno, in dialogo con Grioli ma partendo da un nuovo punto di vista, Paolo Podio Guidugli e Salvatore Marzano stanno pubblicando un importante lavoro in proposito [64], ed altri sviluppi sono in corso di elaborazione.

In verità, l'intento che guidava Agostino Cournot era assai più ambizioso e, proprio per questo, più immaturo: per scoprire la situazione limite del corpo rigido — egli dice — «il faut recourir à d'autres considérations que celles qui conduisent aux équations ordinaires de l'équilibre et du mouvement», e ciò può attuarsi mediante «un artifice particulier de calcul» idoneo a presentare i valori limiti «sous une forme remarquable» [65]. Tale «artificio particolare di calcolo» di cui Cournot preannunzia qui l'esistenza, prende forma sostanzialmente perfetta nelle pagine dello stesso Bulletin de Férussac, l'anno successivo, il 1828, dove appaiono due articoli consecutivi firmati rispettivamente con le sigle S. e A.C., sul medesimo problema degli appoggi.

In questi articoli la questione è posta in termini analoghi a quelli già da tempo ricorrenti presso numerosi autori; si ricerca un nuovo principio per il corpo rigido che segni la differenza essenziale che passa tra la decomposizione delle forze (problema di per sé indeterminato, salvo casi particolari) e la determinazione delle pressioni (univoca, in virtù del principio di ragion sufficiente). «Ces deux notions de forces et de pressions sont réellement distinctes; (...) de même que pour passer de la statique à la dynamique, il est nécessaire d'admettre un principe nouveau, la proportionalité des vitesses aux forces; de même pour passer à la théorie des pressions, il faut admettre un principe que l'esprit puisse saisir comme évident; ce principe, quel est-il?». Queste parole sono di S., l'autore del primo articolo, ma la loro paternità è da S. attribuita a Vène, ufficiale del

63. G. Grioli, *On the stress in rigid bodies*, Meccanica *18*, 1983, pp. 3-7.
64. S. Marzano, P. Podio Guidugli, *Materiali elastici approssimativamente vincolati*. Rend. Sem. Mat. Padova (in stampa).
65. A. Cournot, loc. cit., p. 11.

genio francese. È questi il primo militare (quanti militari o insegnanti in scuole militari nella nostra storia! da Delanges, a Vène, sino a Menabrea) che intuì la soluzione vincente sin dal 1818: «l'auteur, partant de la considération que, dans la nature, les effects sont presque toujours liés à leur causes par des conditions de minimum ou de maximum, pense que les pressions doivent être égales entre elles le plus possible, que leur différences doivent être en somme un minimum, ou enfin que leur produit total est un maximum» [66]. Si noti quant'è vaga la formulazione del principio; in sostanza, vien soltanto rivendicata la speranza di poter applicare alla statica quella teleonomia che sin dal tempo di Maupertuis e di Euler era stata attribuita in generale ai fenomeni meccanici.

La relazione che S. dà della memoria di Vène («présenté à l'Académie des Sciences pour le concours du prix de physique décerné à M. Oersted») è alquanto sbrigativa: quasi una premessa introduttiva all'articolo seguente «*Sur la théorie des pressions*» dovuto ad Agostino Cournot [67]. Anche per Cournot c'è differenza essenziale tra forze e pressioni: «on ne peut point comparer directement — egli dice — les pressions exercées par un corps contre les obstacles aux forces qui les produisent. Ces pressions, comme les vitesses, sont des grandeurs héterogènes aux forces par lesquelles elles sont engendrées» [68]. L'analogia è con la dinamica dove esiste un principio che collega le forze alle velocità; si sa che la natura di tale principio è incerta poiché non è chiaro se si tratti di legge empirica o di teorema razionale o addirittura — come ritiene Lagrange — di semplice definizione della forza. Ma «peu nous importe cette discussion; nous prenons ce principe comme un fait universellement admis». Per la statica, d'altra parte, si può parlare di *dynamique latente*, ossia del caso limite nel quale gli effetti non son più «resi sensibili da segni geometrici appariscenti», ma certamente vale anche per essa la proporzionalità tra cause ed effetti: «ainsi, un point soumis à des forces étant retenu par un obstacle fixe, nous admettons que la pression exercée, par ce point contre l'obstacle, est proportionelle à la résultante des forces ou à la vitesse que ce point prendrait dans le premier instant de son mouvement si l'obstacle venait à être anéanti, ou à la droite infiniment petite qu'il décrirait dans la direction de la résultante, pendant l'élément du temps» [69]. Come si nota, questo brano è oltremodo ambiguo, per un'ambiguità non molto dissimile da quella che caratterizzava la prima trattazione di Euler: la proporzionalità tra pressioni P, P^1,..., e spostamenti p, p^1,..., nel primo istante di un movimento «virtuale», è da intendersi quale definizione generale derivante dal concetto di pressione, o quale legge suggerita dall'esperienza?

66. *Mémoire sur les pressions, par M. Vène,* Bull. ... de Férussac, 1828, p. 10.
67. A. Cournot, *Sur la théorie des pressions,* Bull. ... de Férussac, 1828, pp. 10-22.
68. Ibidem, p. 11.
69. Ibidem, p. 12.

Asteniamoci dalla discussione: si assuma *l'ipotesi* («nous admettons...»). Allora tutto vien chiaro. Se F, F^1,..., designano le forze date operanti sul sistema secondo le direzioni f, f^1,..., il principio della velocità virtuale si esprime nella:

$$F\delta f + F'\delta f' + \text{etc.} - (P\delta p + P'\delta p' + \text{etc.}) = 0 \qquad [9]$$

che dà le relazioni di equilibrio ove si riducano al più piccolo numero possibile le variazioni indipendenti «en tenant compte des liaisons propres du système, mais non pas de celles qui résultent de la présence des obstacles (...). Quand on a égard à la présence de ces obstacles pour le nombre des variations, il vient simplement: $F\delta f + F'\delta f' + \text{etc.} = 0$; donc aussi, dans le même cas: $P\delta p + P'\delta p' + \text{etc.} = 0$».

A questo punto, in virtù della proporzionalità $P :: p$, risulta dimostrata la:

$$p\delta p + p'\delta p' + etc. = 0$$

«*relation en vertu de laquelle la somme des quantités* p^2, p'^2, etc., ou, par l'hypothèse, celle des carrés des pressions P, P^1 etc., est un *minimum*; car il est facile de s'assurer que le cas du *maximum* ne peut avoir lieu ici. Par conséquent, les équations qui complètent, dans tous les cas, le nombre de celles qui sont nécessaires pour l'entière détermination des pressions, résultent de la condition que la somme des carrés de ces pressions soit un *minimum*» [70].

Questa pagina è davvero sconcertante: c'è tutto nella stringatezza del ragionamento e nella verità della conclusione, e non c'è niente come al termine di un subdolo circolo vizioso. Lo ha notato con grande acutezza (e una briciola di malignità) Alberto Castigliano nel paragrafo introduttivo di uno dei suoi lavori: «l'anno 1828 il Cournot pubblicò (...) una Memoria in cui estese il principio di Vène, e cercò di dimostrarlo, benché, per vero dire, la sua dimostrazione non sia altro che un giro vizioso» (cfr. 1ª Memoria del 1875, p. 5).

Il nocciolo della questione sta nella natura da assegnare all'ipotesi $P :: p$; se essa è il fondamento della «dinamica latente» in cui risiede l'essenza della statica, allora Castigliano ha ragione: la dimostrazione di Cournot è un giro vizioso. Se invece quell'ipotesi è essa stessa il principio di esperienza che congiunge le pressioni agli spostamenti in virtù di un'equazione di legame elastico, allora la dimostrazione è corretta e ben poco ad essa è stato aggiunto dagli autori successivi, Menabrea compreso.

Il qual Menabrea tenterà inutilmente di garantirsi l'originalità della propria scoperta affermando che Cournot era giunto a una formulazione imperfetta ($\Sigma P^2 = min$) ma recuperabile come caso particolare del «principio di elastici-

70. Ibidem, p. 13.

tà» ($\Sigma\ mP^2 = min$, con $p = mP$). Infatti ciò *non è vero*; basta leggere l'articolo di Cournot a p. 18, dove vien fatto riferimento al legame elastico: «En général, faisant dans notre analyse $p = mP$, $p' = m'P'$, etc., l'équation $\Sigma\ P\delta p = 0$ donnerait $\Sigma \frac{1}{m} pdp = 0$, c'est à dire que la somme $\Sigma \frac{1}{m} p^2$ ou celle $\Sigma\ mP^2$ devrait être un *minimum*». Purtroppo, subito dopo il testo s'offusca tornando al concetto del corpo rigido come limite del côrpo elastico e pretendendo che il principio di minimo valga in ogni caso. Il difetto di Cournot sta nella eccessiva generalità dei suoi intenti. Il contributo dei successori sta semplicemente nel *delimitare* (e non nell'estendere!) il campo di validità dell'argomentazione; sta cioè nel terminarla a tempo, a un passaggio «penultimo», senza pretender troppo da essa. Per questo, sin dall'inizio del presente lavoro, abbiamo detto che la nostra storia non riguarda progressive «scoperte» ma «riconoscimenti» più puntuali: il merito preminente di Castigliano consisterà infine nel terminare ancor prima, ad un passaggio «terz'ultimo», la trattazione, dimostrando che lo stesso principio di minimo può esser ritenuto un ornamento soverchio rispetto all'efficacia dei teoremi strumentali che ad esso conducono.

Da Cournot a Menabrea

È incredibile come esistano stagioni di fioritura delle idee per cui, nello stesso giro di anni, senza probabili collegamenti diretti, la ricerca scientifica sembra tacitamente sospinta a trovar semi e frutti della stessa qualità. Non s'ha da credere che il Rev. H. Moseley avesse letto di soppiatto l'articolo di Cournot, nascondendo ai lettori inglesi del *Philosophical Magazine* la provenienza delle sue intuizioni [71].

Egli presenta il *New Principle in Statics, called the Principle of Least Pressure* come sua scoperta, e tale esso è. Peraltro la formulazione di tale principio è assai imperfetta: «If there be any number of forces in equilibrium among which there enters a system of resistances, then are these resistances such, that their sum is a Minimum; each being considered a function of the coordinates of its point of application, taken with a positive sign, and subjected to the conditions imposed by the equilibrium of the whole» [72]. In formula: $\Sigma P = min$. Parreb-

71. H. Moseley, *On a New Principle in Statics, called the Principle of least pressure*, Phil. Mag., (3), *3*, 16, 1833, pp. 285-288; *On the Theory of Resistances in Statics*, Ibidem, (3), *3*, 18, 1833, pp. 431-436.
72. Ibidem, pp. 285-286.

be di dover prevedere disastri nelle applicazioni tratte da una simile formula; ma ciò non accade, poiché l'intento di Moseley è il ritrovare qualitativamente il vecchio *Principium* euleriano, e questi gli torna fortunosamente [73].

L'anno appresso, analoghi pensieri sostengono un lavoro di G.M. Pagani presentato all'Académie des Sciences di Bruxelles; Pagani tornerà sull'argomento nel 1838 con una nota aggiuntiva inserita tra gli Atti dell'Accademia di Torino [74]. Qui il riferimento all'elasticità è chiaramente denunciato, sia nel caso di cordoni elastici fissi rispettivamente in una delle loro estremità e riuniti nell'altra in un nodo caricato da una forza (memoria del 1834), sia nel caso di una lastra rigida sorretta da colonne elastiche (memoria del 1838). La soluzione è tratta in generale, secondo un procedimento disteso ed accurato anche dal punto di vista tecnico; ad esempio, nel saggio torinese, son tenuti presenti i risultati della teoria sulla pressoflessione assegnando i limiti relativi all'instabilità euleriana e alla rottura. Pagani riconosce così che il *Principium* di Euler è un semplice corollario di tale teoria in un'ipotesi particolare, e cioè «en réduisant chaque colonne à son filet central» [75]; dunque, se (x, y) è il piano d'appoggio, la distribuzione delle pressioni segue la legge

$$P = A + Bx + Cy. \qquad [10]$$

A questo punto, la proposizione di Cournot $\Sigma P^2 = min$ è dedotta come «propriété remarquable des pressions telles qu'elles risultent de la formule générale». Infatti «nous aurons $\Sigma\, \delta P = 0$, $\Sigma\, x\delta P = 0$, $\Sigma\, y\delta P = 0$. Multiplions la première de ces équations par A, le seconde par B et la troisième par C; la somme des produits donnera $\Sigma\,(A + Bx + Cy)\, \delta P = 0$, ou bien, en égard à l'equation [10], $\Sigma\, P\delta P = 0$. Donc etc.» [76]. La dimostrazione è perfetta, come si vede, ma troppo limitata al caso particolare. Ha ragione Menabrea a ritenerla una semplice anticipazione del suo «principio di elasticità» [77].

Meno ragione ha invece Menabrea a collocare sullo stesso piano di Pagani il Mossotti le cui *Lezioni di Meccanica Razionale* (Pisa 1858) riportano il teorema di minimo «annunciato per la prima volta in un articolo del Bulletin de Férussac, Janvier 1828, e segnato A.C.» subordinandolo con chiarezza all'ipotesi di elasticità. Mossotti parte dal principio dei lavori virtuali [9] e per trarre da es-

73. Ibidem, pp. 431-434.

74. G.M. Pagani, *Note sur l'équilibre d'un système dont une partie est supposée inflexible et dont l'autre partie, est flexible et extensible*, Mém. Acad. de Bruxelles *8*, 1934, pp. 1-14; *Mémoire sur l'équilibre des colonnes*, Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino, (2) *1*, 1939 (1938) pp. 316-371.

75. Ibidem, p. 364.

76. Ibidem, p. 365-366.

77. L.F. Menabrea, *Sul principio di elasticità*, Atti R. Accad. d. Sc. di Torino, 1870, p. 687.

so l'equazione $\Sigma P\delta p = 0$ sviluppa un argomento analogo a quello già usato da Cournot, seppur un poco più disteso e già assai prossimo alla dimostrazione che nel 1869 Bertrand comunicherà a Menabrea con una lettera del 16 gennaio.

Al medesimo esito del Mossotti era giunto nel 1857 anche Alessandro Dorna [78]: il suo lavoro sul problema degli appoggi ha l'aspetto dimesso di un esercizio applicativo utile agli allievi della Regia Accademia Militare di Torino dove Dorna insegnava, per mostrar loro l'efficacia del principio dei lavori virtuali. Secondo l'Autore, tale principio (da lui denominato equazione dei «momenti virtuali») può essere scritto nella seguente forma:

$$\mathrm{S}\,(Q\ \ \Delta q) + \mathrm{S}\,(L\ \ \Delta l) + \Sigma\ P\,\Delta p = 0 \qquad [11]$$

dove i primi due termini designano i «momenti virtuali» delle forze esterne e delle forze interne, mentre il terzo termine indica il «momento virtuale» delle pressioni di appoggio. Ora — dice Dorna — «volendo considerare i sostegni come fissi, rispetto agli altri punti del sistema, è necessario supporre che i medesimi si muovano infinitamente meno di questi, e che, per conseguenza, i momenti virtuali delle pressioni P, P' siano infinitamente piccoli rispetto a quelli delle altre forze applicate a punti mobili. Ciò fa sì che l'equazione [11] si scompone nelle seguenti:

$$\mathrm{S}\,(Q\ \ \Delta q) + \mathrm{S}(L\ \ \Delta l) = 0$$
$$\Sigma P\ \ \Delta p = 0$$

la prima delle quali è indipendente dalle pressioni, e la seconda non contiene che queste» [79].

La dimostrazione data da Dorna è in certo modo geniale, per l'idea di sostituire all'immagine di un appoggio inamovibile quella di un appoggio che subisca spostamenti infinitesimi d'ordine superiore rispetto alle deformazioni e agli spostamenti del corpo. Resta tuttavia poco convincente e per nulla rigorosa. Lo stesso giudizio vale per la celebre memoria di Luigi Federico Menabrea presentata l'anno successivo, il 1858, presso i Comptes Rendus dell'Accademia di Francia [80]. In realtà Menabrea non aggiunse nulla alla trattazione ancor lacunosa di Dorna, ma ne estese grandemente l'interpretazione, sì da farne un metodo generale per la descrizione completa del comportamento elastico in termini energetici. A tale scopo, l'ufficiale sabaudo mutò il modello di riferimento: non più il corpo poggiante su un piano, ma il «sistema elastico» costituito da punti

78. A. Dorna, *Memoria sulle pressioni sopportate dai punti d'appoggio di un sistema equilibrato ed in istato prossimo al moto*. Mem. R. Accad. della Sc . di Torino, *18*, 1857, pp. 4-40.

79. Ibidem, p. 9.

80. L.F. Ménabréa, *Nouveau Principe sur la Distribution des tensions dans les systèmes élasques*, Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences, *46*, séance du 31 mai 1858.

materiali tra loro connessi da elementi lineari deformabili elasticamente. L'intrico dei punti e delle linee poteva così rappresentare *in astratto* un qualunque solido discretizzato nelle sue molecole, e *in concreto* una complicata struttura reticolare. D'un colpo erano raggiunte l'universalità dell'oggetto studiato dalla teoria dell'elasticità e la immediata aderenza alle applicazioni dell'ingegneria. Anche il principio, ovvero la nuova equazione introdotta da Cournot, da Pagani, Mossotti e Dorna, mutava aspetto: non più un'anonima espressione quadratica delle reazioni vincolari, ma l'energia di deformazione elastica era resa protagonista della condizione di minimo.

Per questa maggiore intensità di riconoscimento il merito di Menabrea è indubitabile; forse è giusto attribuirgli la paternità del «nuovo principio» benché — come abbiamo veduto nelle pagine precedenti — «nuovo» esso non sia affatto. L'aspetto innovativo sta appunto nella più vasta visuale da cui Menabrea si colloca e nella solenne enunciazione che pone il *principe d'élasticité* a fondamento dell'intera teoria dei sistemi elastici: «Lorsqu'un système élastique se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail développé par l'effect des tensions ou des compressions des liens qui unissent les divers points du système est un minimum». Naturalmente, un principio vale in sé, nella misura in cui riesca a coordinare i fenomeni; ma per il principio di elasticità i suoi precedenti storici obbligavano a una dimostrazione. Anziché intendere la condizione di minimo del lavoro interno quale strumento di connotazione e forse di definizione dei sistemi elastici, sembrava doveroso mutare il principio in teorema, riconducendolo alle leggi note della meccanica e alla consueta descrizione fenomenologica dell'elasticità. In questa impresa Menabrea si impegnò con reiterati tentativi infruttuosi, respingendo critiche graffianti di colleghi e subalterni, poggiando su l'enfasi dell'enunciazione là dove il rigore era incerto, ribadendo con esempi, citando a testimonio gli scienziati più illustri che eran scesi in suo aiuto contro le polemiche del coraggioso tenente Emilio Sabbia; fu l'impresa della sua vita. E fu anche l'impresa all'ordine del giorno per l'intera comunità scientifica torinese in cui Alberto Castigliano entrò trionfatore.

Finalmente in porto

Sarebbe bello poter dire a questo punto che la vera soluzione apparve per la prima volta ad opera di Castigliano con la sua tesi di laurea del 1873; sarebbe degna conclusione della storia qui narrata in onore dello scienziato astigiano nel centenario della sua morte. L'aderenza ai fatti ci costringe invece a riconoscere che la soluzione definitiva ebbe luogo qualche anno prima, tra il 1864 e il 1865, ad opera di A. Dorma e di James H. Cotterill; a questi due autori può esser anche associato James Clerk Maxwell che nel 1864, appunto, inaugurò il «metodo delle forze» per l'analisi dei sistemi elastici come applicazione del teorema di Clapeyron [81]; tuttavia, lo splendido lavoro di Maxwell segue un suo percorso differente dalla linea sin qui tracciata per la definizione di un principio o di un teorema di minimo e quindi possiamo tralasciarlo. I contributi di Dorna e di Cotteril sono al contrario ben centrati e conducono a una perfetta chiarificazione.

Nei suoi «*Elementi di Meccanica Razionale*», la cui prima edizione è del 1865 a Torino, il Dorna affronta il problema di determinare «le pressioni dei punti di appoggio di un sistema e le compressioni e le dilatazioni dei suoi lati», secondo un metodo del tutto generale, nello spirito di Lagrange. Ottenute così le formule risolutive, egli dimostra che ad esse si perviene necessariamente partendo dal principio di minimo. In verità il testo di Dorna è un po' sbrigativo, ma in ultima analisi anticipa il metodo che Castigliano adotterà nella sua tesi di laurea.

I saggi di Cotterill sono poi di qualità straordinaria: v'è detto tutto e nel modo più esplicito, più consapevole [82]. Quel che stupisce è l'estrema umiltà, persin quasi ostentata, dell'autore. Egli consegue i risultati più ambiti in pochi passaggi irreprensibili, ma ha sempre l'aria di scusarsene, come se egli ardisse troppo e per propria dimenticanza o ignoranza non sapesse che altri li avevano già conseguiti.

Nella prima memoria (presentata il 3 Marzo 1865), Cotterill attribuisce il merito della scoperta a Moseley e la correzione da lui introdotta è dissimulata come miglioramento e generalizzazione. Partendo dal teorema di Clapeyron

$$2U = \Sigma\ (Xu + Yv + Zw)$$

dove U è il lavoro $X,\ Y,\ Z$ le componenti di una delle forze «acting on a free perfectly elastic body» e $u,\ v,\ w$ le componenti dello spostamento relativo, Cotterill osserva: «U may be expressed as a homogeneous quadratic function of the forces; therefore

$$2U = \Sigma\ \left(X\frac{\partial U}{\partial X} + Y\frac{\partial U}{\partial Y} + Z\frac{\partial U}{\partial Z}\right) \qquad [12]$$

81. J.C. Maxwell, *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, Phil. Mag. *27*, 1864, pp. 294-299.

82. J.H. Cotterill, *On an Extension of the Dynamical Principle of Least Action*, Phil. Mag. (4), *29*, 1865 pp. 299-305; *On the Equilibrium of Arched Ribs of Uniform Section*, Ibidem pp. 380-389; *Further Applications of Least Action*, Ibidem, pp. 430-436.

comparing which expressions for U, we see that

$$\frac{\partial U}{\partial X} = u \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = v \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = w \qquad [13]$$

Non conceive the body, instead of being free, to be immoveably attached at certain points to some fixed object, then we shall have for these points:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

that is, the variation in U, due to a change in the resisting force at the fixed boundaries of the system, is zero» [83]. La conclusione vien da sé, dimostrando il teorema di minimo. La seconda memoria presentata sempre nel marzo 1865 ha un'apparenza tecnica, come se all'Autore interessasse soltanto dedicarsi allo studio degli Arched Ribs; ma alla fine, in poche righe, si dà un forte balzo innanzi: Cotterill avverte che l'aver espresso l'energia in funzione delle forze è pretender troppo dal teorema di Clapeyron; forse avverte anche che l'uso della rappresentazione [12] con la deduzione [13] non è conclusiva poiché i coefficienti della forma [12] dipendono da X, Y, Z; e allora dà la dimostrazione «perfetta», la stessa che si può riscontrare nelle memorie di Castigliano del 1875. La terza memoria dell'aprile 1865 *(Further Applications...)* è davvero stupenda: qui il principio di minimo è applicato, appendendovi lagrangianamente le equazioni indefinite di equilibrio e ottenendo alla fine le equazioni di Lamé. Eppure la modestia non abbandona l'autore il quale anzi avverte che «nothing has been strictly proved» e teme d'aver detto cose già note, essendo «unacquainted with much that has been done on this subject».

Che resta dunque a Castigliano? Certo è che se il valore di uno scienziato dovesse esser misurato col cronometro, per decidere chi sia giunto prima alla mèta in una scoperta o in una dimostrazione, si dovrebbe concludere con un giudizio riduttivo, poiché gran parte delle proposizioni formulate da Castigliano non detengono un assoluto primato temporale; gli stessi teoremi «sulle derivate del lavoro di deformazione» sono letteralmente anticipati nei lavori di Cotterill. Ma la storia richiede un giudizio ben più articolato.

Castigliano è ammirabile non tanto come «profeta» di una via ancora inesplorata, quanto piuttosto come ultimo «eroe» della lunga e gloriosa battaglia scientifica che dall'iniziale ricerca di Euler, giusto un secolo addietro, attraversò paradossi, animò speranze, suscitò domande insondabili, offerse piste divergenti, incontrò promettenti sintesi, affrontò seri problemi tecnici, per concludersi infine e quasi cessare con la tesi di laurea del giovane ingegnere d'Asti. In

83. J.H. Cotterill, *On an Extension ...*, cit., p. 304.

Castigliano, infatti, raggiunge pienezza un duplice *riconoscimento*. Da un lato egli *riconosce* i limiti di validità del principio di minimo al quale dev'esser tolto quell'eccesso di intenzioni che i predecessori gli assegnavano: esso non è affatto un nuovo principio di statica, né vale per ogni sistema ed ogni materiale, ché anzi anche nell'ambito della teoria dei sistemi elastici può venir meno. A questo proposito, è significativo notare che l'animo col quale Castigliano s'accinse alle sue prime ricerche è metodologicamente simile a quello con cui il Padre Saccheri aveva affrontato la *vextata quaestio* sul 5° Postulato di Euclide: e cioè tentar di risolvere i sistemi elastici facendo a meno del principio di minimo per verificare se emergessero risultati con esso incompatibili [84].

Dall'altro lato Castigliano riconosce e sommamente valorizza l'aspetto tecnico e applicativo della soluzione da lui dimostrata; egli avverte che lo strumento di calcolo, nella sua efficacia, è ben più amabile del principio altisonante nelle sue suggestioni speculative. In ciò Castigliano è autentico e moderno ingegnere: lo testimonia la cura e la ricchezza degli esempi nei quali egli si diffonde con perseverante attenzione, non trascurando nessuno dei problemi che la teoria dell'elasticità consente di inquadrare rigorosamente a favore dell'arte e della scienza costruttiva. Osiamo dire che la vera originalità dell'opera di Castigliano, quel che la distingue fortemente dai contributi di tutti gli autori sin qui citati, sta proprio nell'aver egli saputo erigere l'intera scienza delle strutture a partire dai suoi teoremi, secondo un disegno organico, armonico, completo, nel quale lo splendore della sintesi teorica e applicativa di gran lunga sopravanza la somma di tutti gli addendi.

84. A. Castigliano, *Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici*, Atti R. Accad. delle Sc. di Torino, 10, 1875, cfr. l'*Introduzione*.