[illegible] Ing. Castigliano

INTORNO AI SISTEMI ELASTICI

DISSERTAZIONE

PRESENTATA DA

CASTIGLIANO ALBERTO

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

della R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri

IN TORINO

per ottenere la Laurea di

INGEGNERE CIVILE

1873

TORINO

VINCENZO BONA

TIPOGRAFO DI S. M.

Via Ospedale 3, e Lagrange 7

A TE MADRE MIA

NELLA CUI COSTANZA

HO IMPARATO LA COSTANZA

QUESTO POVERO OPUSCOLO

DEDICO

Ing. Luigi Castigliano

INTORNO AI SISTEMI ELASTICI

INTRODUZIONE

1. La determinazione degli sforzi, che sopportano le diverse parti dei sistemi di corpi adoperati nella pratica, è una delle questioni più importanti per gli ingegneri. Se i corpi in natura fossero assolutamente rigidi, non vi sarebbero che pochi casi in cui tali sforzi si potrebbero determinare: ma in natura i corpi essendo tutti elastici, riesce possibile determinare completamente gli sforzi di tutte le parti di un sistema qualunque; poichè la modificazione della forma di alcune di queste parti trae seco necessariamente quella di tutte le altre, e da questi cambiamenti di forma dipende appunto la grandezza degli sforzi.

Tuttavia questa considerazione per quanto semplice non fu chiaramente avvertita ed enunciata se non nel 1825, nel qual anno Navier diede la risoluzione di alcuni problemi, che prima di lui erano riguardati quasi come enigmi (Vedi *Saint-Venant*, *Notes aux leçons de Navier*, *Historique*, pag. LXIX). Dopo Navier molti scrissero intorno ai sistemi elastici; ma il primo, che diede un metodo generale pel calcolo di questi sistemi è il signor de Saint-Venant, l'illustre annotatore e continuatore delle opere di Navier: egli prende per incognite le forze da determinarsi e propone di determinarle esprimendo tutte le condizioni geometriche a cui deve soddisfare il sistema.

Ora, avendomi il chiariss. Prof. Cav. Giovanni Curioni proposto al principio dell'anno corrente, di fare uno studio accurato sulla stabilità delle centine adoperate nella tettoia dello scalo di Foggia, che formano un sistema assai complicato, mi parve che se invece di prendere direttamente per incognite le forze, si fossero prese le variazioni delle coordinate di tutti i vertici del sistema, si sarebbe spianata la via ad esprimere tutte le condizioni geometriche a cui il sistema deve soddisfare, ed il metodo si sarebbe colla stessa semplicità applicato a tutti i sistemi, per quanto essi fossero complicati.

Ma anche questo metodo, benchè parta da un concetto semplicissimo, pure nelle applicazioni conduce a calcoli assai lunghi, particolarmente quando si tratta di verghe elastiche congiunte a snodo e di parti soggette a flessione, torsione o scorrimento trasversale. Pensando al modo di abbreviare i calcoli mi parve di aver trovato un teorema, il quale raggiunge assai bene questo scopo: questo teorema io lo chiamo *del minimo lavoro* pel motivo, che dirò in seguito, ma esso non devesi confondere col teorema proposto da Vène, Cournot, Mossotti e Menabrea, il quale consiste in ciò che *quando un sistema elastico si deforma il lavoro molecolare della deformazione è un minimo* (*):

(*) Riguardo a questo teorema, a cui il Generale Menabrea ha dato il nome di *principio d'elasticità* o *del minimo lavoro*, ecco come si esprime il Prof. Genocchi in una *breve memoria intorno ad alcuni scritti attribuiti ad Agostino Cauchy* letta all'Accademia delle scienze di Torino l'anno 1870: « non mi arrogo di esaminare i fondamenti teorici dell'accennato principio, che furono discussi, già sono parecchi anni, dall'illustre Prof. Giusto Bellavitis, e che non ancora si riuscì a render liberi da ogni postulato, secondo l'opinione espressa dal signor Yvon Villarceau in una delle lettere pubblicate dal Conte Menabrea ».

il teorema che io propongo è puramente algebrico; esso è soltanto un metodo per abbreviare i calcoli. Io spero di poterlo dimostrare rigorosamente e di farne vedere con alcune applicazioni l'utilità e l'uso.

Quest'opuscolo è diviso in tre parti: nella prima ho esposto il modo di risolvere tutti i problemi relativi ai sistemi elastici prendendo per incognite le variazioni delle coordinate dei vertici: nella seconda ho procurato di dimostrare che il teorema del minimo lavoro condurrà sempre agli stessi risultati a cui conduce il metodo precedente: nella terza ho fatto alcune applicazioni del teorema medesimo.

La mia poca coltura letteraria mi ha tolto di esporre le mie idee con quella chiarezza e con quella proprietà, che sono i primi pregi delle scritture scientifiche, e la mia poca conoscenza delle parti elevate delle matematiche, mi ha tolto di trattare i problemi, che mi sono proposto, coi metodi più semplici e più eleganti.

Se malgrado questi difetti il mio povero lavoro non riuscirà affatto inutile, mi parrà d'essere largamente ricompensato delle mie fatiche.

PARTE PRIMA.

Metodo generale per determinare le pressioni e le tensioni in un sistema elastico.

---

2. Quando un sistema formato di verghe elastiche congiunte a snodo le une colle altre per modo che prima di essere sollecitato da forze estrinseche, le verghe che lo compongono, non siano nè tese, ne premute, vien sottoposto all'azione di forze esterne applicate a'suoi vertici, esso si deforma, producendosi un allungamento o un accorciamento di tutte le verghe, che lo compongono. Dopo la deformazione e quando il sistema ha ripreso una posizione d'equilibrio, ciascuna verga trovasi compressa o tesa, e le tensioni di tutte le verghe concorrenti in un vertice debbono fare equilibrio alle forze esterne applicate in quel vertice.

Perciò riferendo il sistema a tre assi di coordinate ortogonali e chiamando n il numero de' suoi vertici, si avranno per ciascun vertice tre equazioni di equilibrio, onde in tutto $3n$ equazioni. Da queste però è facile dedurne le sei caratteristiche, che assicurano l'equilibrio del sistema considerato come rigido dopo la deformazione; e siccome queste sei equazioni non contengono le tensioni delle verghe, ne segue che le equazioni utili per determinare queste tensioni si riducono a $3n-6$, e non bastano in generale a determinare tutte le incognite, se non quando il numero delle verghe sia uguale a $3n-6$. Ma se questo caso ha luogo, *le tensioni delle verghe restano determinate in-*

dipendentemente dalla loro forma e grossezza e dalla sostanza di cui sono formate; mentre invece quando il numero delle verghe supera $3n - 6$, *le tensioni delle verghe riescono bensì determinate, ma dipendono dalla forma e grossezza delle verghe e dalla sostanza di cui sono formate.*

Chiamiamo V_1, V_2, V_3,.... V_p,... i diversi vertici del sistema, X_p, Y_p, Z_p le componenti della forza applicata al vertice V_p, α_{pq}, β_{pq}, γ_{pq} gli angoli che la verga $V_p V_q$ fa cogli assi, T_{pq} la tensione di questa verga. Le equazioni di equilibrio pel vertice V_p saranno:

$$\left.\begin{array}{c} X_p + \Sigma\, T_{pq} \cos \alpha_{pq} = 0\,, \quad Y_p + \Sigma\, T_{pq} \cos \beta_{pq} = 0\,, \\ Z_p + \Sigma\, T_{pq} \cos \gamma_{pq} = 0\,, \end{array}\right\} \quad [1]$$

avvertendo che il simbolo sommatorio Σ è relativo a tutti i valori di q corrispondenti a tutti i vertici congiunti mediante verghe elastiche al vertice V_p.

Supponendo scritte per tutti i vertici le tre equazioni d'equilibrio, e volendone dedurre le sei caratteristiche dei sistemi rigidi, si avvertirà che

$$\cos \alpha_{pq} = - \cos \alpha_{qp}\,, \quad \cos \beta_{pq} = - \cos \beta_{qp}\,, \quad \cos \gamma_{pq} = - \cos \gamma_{qp},$$

e si procederà nel modo consueto. Del resto si possono ottenere le sole $3n - 6$ equazioni che ora ci occorrono, supponendo che dei tre vertici V_1, V_2, V_3, collegati da verghe, il primo sia nell'origine, il secondo non possa muoversi che sull'asse delle x, e il terzo non possa muoversi che nel piano delle xy; poichè allora il vertice V_1 non ci darà più alcuna equazione, il vertice V_2 ce ne darà una soltanto e il vertice V_3 ce ne darà due.

3. È noto che chiamando ω l'area della sezione di una verga omogenea, l la sua lunghezza, E il coefficientè di

elasticità della sostanza di cui è formata, la tensione o compressione, che bisogna esercitare sulla verga per produrre un allungamento o un accorciamento $= \lambda$, essendo λ quantità piccolissima e al di sotto di certi limiti, è espressa da $E\omega\frac{\lambda}{l}$ ossia da $\epsilon\lambda$, posto in generale $\frac{E\omega}{l} = \epsilon$. Ne segue che nelle $3n - 6$ equazioni trovate nel numero prec., possiamo sostituire alle tensioni delle verghe i loro valori in funzione degli allungamenti positivi o negativi delle verghe medesime, onde le equazioni [1] diventano:

$$X_p + \Sigma \epsilon_{pq} \lambda_{pq} \cos \alpha_{pq} = 0\,, \quad Y_p + \Sigma \epsilon_{pq} \lambda_{pq} \cos \beta_{pq} = 0\,, \quad Z_p + \Sigma \epsilon_{pq} \lambda_{pq} \cos \gamma_{pq} = 0. \qquad [2]$$

Ora, sieno x_p, y_p, z_p, le coordinate del vertice V_p prima della deformazione, $x_p + \xi_p$, $y_p + \eta_p$, $z_p + \zeta_p$ le coordinate del medesimo vertice dopo la deformazione; la lunghezza dell'asta $V_p V_q$ prima della deformazione è

$$l_{pq} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2},$$

e dopo la deformazione

$$\begin{aligned} l_{pq} + \lambda_{pq} = \\ = \sqrt{(x_q + \xi_q - x_p - \xi_p)^2 + (y_q + \eta_q - y_p - \eta_p)^2 + (z_q + \zeta_q - z_p - \zeta_p)^2} = \\ = \sqrt{l^2_{pq} + 2\, l_{pq} \{(\xi_q - \xi_p) \cos \alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p) \cos \beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p) \cos \gamma_{pq}\} + (\xi_q - \xi_p)^2 + (\eta_q - \eta_p)^2 + (\zeta_q - \zeta_p)^2}\,. \end{aligned}$$

Siccome le differenze $\xi_q - \xi_p$, $\eta_q - \eta_p$, $\zeta_q - \zeta_p$ sono sempre piccolissime a fronte delle altre $x_q - x_p$, $y_q - y_p$, $z_q - z_p$, potremo sviluppare l'espressione precedente in serie, tenendo conto soltanto delle prime potenze delle differenze $\xi_q - \xi_p$, $\eta_q - \eta_p$, $\zeta_q - \zeta_p$, con che si ottiene:

$$\lambda_{pq} = (\xi_q - \xi_p) \cos \alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p) \cos \beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p) \cos \gamma_{pq}, \qquad [3]$$

e la tensione della verga $V_p V_q$ riesce

$$T_{pq} = \epsilon_{pq} \left\{ (\xi_q - \xi_p) \cos \alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p) \cos \beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p) \cos \gamma_{pq} \right\}. \quad [4]$$

Con questa formola si possono esprimere le tensioni di tutte le verghe in funzione degli spostamenti dei vertici parallelamente agli assi: questi spostamenti sarebbero $3n$, se tutti i vertici potessero muoversi, ma a cagione delle condizioni a cui abbiamo assoggettato i tre vertici V_1, V_2, V_3, si ha $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$; $\eta_2 = 0$, $\zeta_2 = 0$; $\zeta_3 = 0$, onde gli spostamenti incogniti si riducono a $3n - 6$.

Sostituendo ora nelle $3n - 6$ equazioni di equilibrio, alle tensioni incognite le loro espressioni in funzione dei $3n - 6$ spostamenti dei vertici, si potranno determinare tutti questi spostamenti, e sostituendoli poscia nell'espressione [4], si otterranno le tensioni di tutte le verghe del sistema dopo la deformazione.

4. Consideriamo ora un sistema formato di parti soggette a flessione, torsione o scorrimento trasversale, che io chiamerò per brevità *parti flessibili*, e di verghe congiunte a snodo con quelle parti e fra loro. Prendiamo per incognite gli spostamenti paralleli agli assi di tutti i vertici, ove concorrono verghe semplicemente congiunte a snodo fra loro, e di tutti i vertici, ove queste verghe si congiungono a snodo colle parti flessibili; assoggettando però ancora i tre vertici V_1, V_2, V_3 alle stesse condizioni come nel numero precedente: le tensioni di tutte le verghe si potranno esprimere in funzione di questi spostamenti; ora, se queste tensioni fossero note, noi sappiamo che in funzione di esse e delle forze esterne applicate alle parti flessibili del sistema, si potrebbero determinare le variazioni delle coordinate di qualunque punto dell'asse di queste parti. Dunque per ciascun vertice dove le verghe snodate si congiungono alle parti flessibili, si avranno tre equazioni, le quali esprimono gli spostamenti di quel vertice

in funzione degli spostamenti del vertice medesimo e degli altri vertici del sistema: inoltre per ciascun punto, ove concorrono soltanto delle verghe, si avranno pure tre equazioni, le quali esprimono che le tensioni delle aste concorrenti in quel punto e le forze esterne ivi applicate si fanno equilibrio. Però pel vertice V_1 non si avrà alcuna equazione, pel vertice V_2 se ne avrà una sola e pel vertice V_3 se ne avranno due; onde in tutto si avranno tante volte tre equazioni tra gli spostamenti dei vertici del sistema quanti sono i vertici, meno sei equazioni, ossia tante equazioni quante sono le incognite.

Se nel sistema vi sono dei vertici fissi si porrà in uno d'essi (V_1) l'origine; per un altro (V_2) si farà passare l'asse delle x, e per un terzo (V_3) si farà passare il piano delle xy: poi si supporrà che il vertice V_2 non sia assolutamente fisso, ma possa spostarsi sull'asse delle x e gli sia applicata una forza diretta secondo quest'asse; il vertice V_3 possa spostarsi nel piano delle xy e gli siano applicate due forze parallele agli assi delle x e delle y; ed infine tutti gli altri vertici fissi possano muoversi comunque nello spazio, ma ciascun d'essi sia sollecitato da tre forze parallele agli assi. Considerando come note le forze, che abbiamo introdotte, si ricade nel caso precedente e si possono trovare le espressioni degli spostamenti di tutti i vertici: ponendo poi uguali a zero gli spostamenti ξ_2, ξ_3, η_3 dei vertici V_2, V_3 e quelli di tutti gli altri vertici fissi, ed avvertendo invece che sono incognite le forze sostituite ai punti fissi, le quali son tante quanti sono gli spostamenti posti uguali a zero, vedesi che il numero delle incognite resterà precisamente uguale a quello delle equazioni.

Se alcune parti flessibili sono incastrate entro ostacoli fissi, si supporrà che tolto ciascun ostacolo gli si sostituiscano tre forze parallele agli assi ed applicate nel centro della sezione d'incastro, e tre coppie, che abbiano per assi gli assi delle coordinate. Considerando le tre coppie come note, il sistema si può riguardare come contenente solo dei punti fissi e rientra nel caso precedente, onde si otterrà lo stesso numero di equazioni: queste però conterranno tre nuove incognite per ciascun incastro, cioè le tre coppie introdotte: ma avvertendo che gli angoli di cui ha ruotato ogni sezione d'incastro attorno tre assi paralleli a quelli delle coordinate e condotti pel suo centro son nulli, si avranno tre nuove equazioni per ciascun incastro, onde infine tante equazioni quante incognite.

PARTE SECONDA.

Teorema del minimo lavoro.

5. Consideriamo un sistema formato di verghe elastiche congiunte a snodo e teniamo le denominazioni precedenti: io dico che *se determino le tensioni* T_{pq} *in modo che rendano minima l'espressione* $\Sigma \frac{T^2_{pq}}{\epsilon_{pq}}$, *supponendo che fra quelle tensioni debbano aver luogo le equazioni* [1], *nelle quali però si considerino come costanti tutte le forze esterne* X_p, Y_p, Z_p, *e tutti gli angoli* α_{pq}, β_{pq}, γ_{pq}, *i valori delle tensioni, che così ottengo, coincidono perfettamente con quelli ottenuti col metodo degli spostamenti.*

Diffatti per trovare i valori delle tensioni T_{pq}, che rendono minima la funzione $\Sigma \frac{T^2_{pq}}{\epsilon_{pq}}$, tenendo conto delle condizioni enunciate nel teorema, si può procedere così : si uguaglia a zero il differenziale della funzione $\Sigma \frac{T^2_{pq}}{\epsilon_{pq}}$, con che si ottiene l'equazione

$$\Sigma \frac{T_{pq}}{\epsilon_{pq}} dT_{pq} = 0; \qquad [5]$$

poi si differenziano le $3n-6$ equazioni [1], considerando come costanti le forze esterne X_p, Y_p, Z_p, e gli angoli α_{pq}, β_{pq}, γ_{pq}, e per mezzo delle equazioni così ottenute si eliminano dall'equazione [5] $3n-6$ differenziali dT_{pq}: infine si uguagliano a zero i coefficienti di tutti i differenziali rimanenti.

Chiamando m il numero totale delle verghe del sistema, ossia delle tensioni incognite, si ottengono così $m-(3n-6)$, le quali congiunte alle $3n-6$ equazioni [1], bastano a determinare tutte le incognite.

Ora differenziando le $3n-6$ equazioni [1], otterremo

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma\, dT_{2q} \cos\alpha_{2q}=0, \\
\Sigma\, dT_{3q} \cos\alpha_{3q}=0\ ,\quad \Sigma\, dT_{3q} \cos\beta_{3q}=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
\Sigma\, dT_{pq} \cos\alpha_{pq}=0\ ,\quad \Sigma\, dT_{pq} \cos\beta_{pq}=0\ ,\quad \Sigma\, dT_{pq} \cos\gamma_{pq}=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{array}\right\} [6]$$

Per eliminare tra queste equazioni e l' equazione [5] i differenziali di $3n-6$ tensioni, serviamoci del metodo dei moltiplicatori: moltiplicando in generale per A_p, B_p, C_p le tre equazioni differenziali provenienti dalle equazioni di equilibrio intorno al vertice V_p, e sommando tutti i risultati coll'equazione [5], otterremo:

$$\Sigma \frac{T_{pq}}{\epsilon_{pq}} dT_{pq} + A_2 \Sigma\, dT_{2q} \cos\alpha_{2q} + A_3 \Sigma\, dT_{3q} \cos\alpha_{3q} +$$
$$+ B_3 \Sigma\, dT_{3q} \cos\beta_{3q} + \ldots + A_p \Sigma\, dT_{pq} \cos\alpha_{pq} + B_p \Sigma\, dT_{pq} \cos\beta_{pq} +$$
$$+ C_p \Sigma\, dT_{pq} \cos\gamma_{pq} + \ldots\ldots = 0.$$

Uguagliando ora a zero i coefficienti dei differenziali di tutte le tensioni, si otterranno tante equazioni quante sono queste tensioni, ed aggiungendovi le $3n-6$ equazioni [1], si avranno tante equazioni quante bastano a determinare tutte le tensioni e i $3n-6$ moltiplicatori.

Per uguagliare a zero il coefficiente di dT_{pq}, si osservi che questo differenziale è contenuto in un solo termine della somma $\Sigma \frac{T_{pq}}{\epsilon_{pq}} dT_{pq}$, e fra le altre somme soltanto quelle moltiplicate per A_p, B_p, C_p, A_q, B_q, C_q lo possono contenere e lo contengono in un solo termine; dunque il coefficiente di dT_{pq} uguagliato a zero ci darà l'equazione:

$$\frac{T_{pq}}{\epsilon_{pq}} + A_p \cos \alpha_{pq} + B_p \cos \beta_{pq} + C_p \cos \gamma_{pq} + A_q \cos \alpha_{qp} + \\ + B_q \cos \beta_{qp} + C_p \cos \gamma_{qp} = 0,$$

ossia, avvertendo che

$$\cos \alpha_{qp} = -\cos \alpha_{pq}\ ,\ \cos \beta_{qp} = -\cos \beta_{pq}\ ,\ \cos \gamma_{qp} = -\cos \gamma_{pq},$$

e moltiplicando per ϵ_{pq},

$$T_{pq} = \epsilon_{pq} [(A_q - A_p) \cos \alpha_{pq} + (B_q - B_p) \cos \beta_{pq} + \\ + (C_q - C_p) \cos \gamma_{pq}]. \qquad [7]$$

Si confronti quest'espressione di T_{pq} coll'espressione [4], e si vedrà che esse non differiscono se non pel cangiamento di ξ, η, ζ, in A, B, C,: ora per determinare i $3n - 6$ spostamenti ξ_p, η_p, ζ_p bisogna sostituire le espressioni delle tensioni dedotte dalla formola [4] nelle $3n - 6$ equazioni [1]; e parimente per determinare i $3n - 6$ moltiplicatori A_p, B_p, C_p, bisogna sostituire le espressioni delle tensioni dedotte dalla formola [7] nelle $3n - 6$ equazioni [1]; vedesi dunque che salvo il cambiamento delle lettere, i calcoli sono precisamente gli stessi nei due casi; cosicchè si troveranno per A_p, B_p, C_p gli stessi valori come per ξ_p, η_p, ζ_p; cioè i moltiplicatori da determinarsi non sono altro che gli spostamenti dei vertici paralleli agli assi.

È dunque dimostrata pei sistemi articolati la verità del teorema del minimo lavoro.

6. Osservazione. — Mentre la pressione o tensione dell'asta V_pV_q cresce da zero sino al valore T_{pq}, il lavoro molecolare dell'altra è espresso da $\frac{1}{2}\frac{T^2_{pq}}{\epsilon_{pq}}$; quindi la somma $\Sigma \frac{T^2_{pq}}{\epsilon_{pq}}$ esprime il doppio del lavoro molecolare prove-

niente dalla deformazione del sistema. È per questo motivo che io ho chiamato il nuovo teorema col nome di teorema del minimo lavoro, benchè non si debba certamente dire che il lavoro molecolare, che si fa nella deformazione del sistema, sia assolutamente un minimo, perchè anzi dalla dimostrazione precedente risulta, che esso è un minimo soltanto quando si considerano come costanti le componenti delle forze esterne parallele agli assi e gli angoli delle verghe cogli assi.

Il vantaggio del teorema che ho dimostrato, è evidente; poichè procedendo col metodo degli spostamenti, non si ha altra via per trovare le tensioni delle verghe, fuorchè sostituire le espressioni di queste tensioni in funzione degli spostamenti nelle $3n - 6$ equazioni [1], e poi determinare i $3n - 6$ spostamenti; mentre invece partendo dal teorema dimostrato, si possono trovare le tensioni delle verghe con qualunque dei metodi che servono a rendere minima una funzione di più variabili vincolate fra loro da alcune equazioni di condizione.

7. Teorema. — *Consideriamo un sistema elastico formato di parti soggette a torsione, flessione o scorrimento trasversale, e di verghe congiunte a snodo con quelle parti e fra loro: io dico che se questo sistema viene sottoposto all'azione di forze esterne cosicchè esso si deformi, le tensioni delle verghe dopo la deformazione sono quelle, che rendono minima l'espressione del lavoro molecolare del sistema, tenendo conto delle equazioni, che si hanno fra queste tensioni, e supponendo costanti le direzioni delle verghe e delle forze esterne.*

Siano T_1, T_2,... le tensioni delle verghe, che per una estremità si congiungono a snodo colle parti flessibili del sistema e coll'altra vanno ai vertici ove concorrono soltanto verghe congiunte a snodo: sia T_{pq} la tensione di una delle verghe, che hanno ambe le estremità nei vertici, ove concorrono soltanto verghe congiunte a snodo: avvertendo poi che il lavoro molecolare proveniente dalla deformazione delle parti flessibili del sistema, si può esprimere in funzione delle forze esterne P, Q, R, ... e delle tensioni T_1, T_2, T_3,..., rappresentiamo questo lavoro con

$$F(P,\ Q,\ R,\ldots.T_1,\ T_2,\ldots.).$$

Secondo il teorema del minimo lavoro dovremo avere

$$\frac{1}{\epsilon_1}T_1\,dT_1+\frac{1}{\epsilon_2}T_2\,dT_2+\ldots+\Sigma\frac{T_{pq}}{\epsilon_{pq}}\,dT_{pq}+$$
$$+\frac{dF}{dT_1}\,dT_1+\frac{dF}{dT_2}\,dT_2+\ldots=0,$$

ossia

$$\left(\frac{T_1}{\epsilon_1}+\frac{dF}{dT_1}\right)dT_1+\left(\frac{T_2}{\epsilon_2}+\frac{dF}{dT_2}\right)dT_2+\ldots+\Sigma\frac{T_{pq}}{\epsilon_{pq}}\,dT_{pq}=0. \qquad [8]$$

Differenziamo ora le equazioni d'equilibrio relative ai vertici in cui concorrono soltanto verghe congiunte a snodo, considerando come costanti le direzioni delle forze esterne e delle verghe, moltiplichiamone i differenziali per le costanti indeterminate

$$A_1,\ B_1,\ C_1;\ A_2,\ B_2,\ C_2;\ldots\ A_p,\ B_p,\ C_p;\ A_q,\ B_q,\ C_q;\ldots,$$

sommiamo i prodotti coll'equazione [8], poi uguagliamo a zero i coefficienti di tutti i differenziali dT_1, dT_2,... dT_{pq},... Otterremo così le equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{T_1}{\epsilon_1}+\frac{dF}{dT_1}-A_1\cos\alpha_1-B_1\cos\beta_1-C_1\cos\gamma_1=0,\\
&\frac{T_2}{\epsilon_2}+\frac{dF}{dT_2}-A_2\cos\alpha_2-B_2\cos\beta_2-C_2\cos\gamma_2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{T_{pq}}{\epsilon_{pq}}-(A_q-A_p)\cos\alpha_{pq}-(B_q-B_p)\cos\beta_{pq}-(C_q-C_p)\cos\gamma_{pq}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\}[9]$$

avvertendo che

$$\cos\alpha_{qp} = -\cos\alpha_{pq}\,,\quad \cos\beta_{qp} = -\cos\beta_{pq}\,,\quad \cos\gamma_{qp} = -\cos\gamma_{pq}.$$

Queste equazioni son tante quante le tensioni incognite, e perciò aggiungendovi le equazioni di condizione, che son tante quante sono i moltiplicatori A_1, A_2, ... A_p, ... B_1, ..., si potranno determinare tutti questi moltiplicatori e tutte le tensioni incognite.

Intanto se fra le equazioni [9] si considerano quelle, che contengono le tensioni delle verghe, le quali non sono congiunte per alcun estremo colle parti flessibili del sistema, si riconosce che esse son precisamente quelle, che si otterrebbero col metodo degli spostamenti per esprimere quelle tensioni, intendendo solo che in generale A_p, B_p, C_p rappresentino gli spostamenti del vertice V_p parallelamente agli assi: i tre vertici V_1, V_2, V_3 dei quali il primo è posto nell'origine delle coordinate, il secondo sull'asse delle x e il terzo nel piano delle xy, suppongo sian di quelli in cui concorrono soltanto verghe congiunte a snodo.

Ci resta solo a dimostrare che anche quelle fra le equazioni [1], le quali contengono le tensioni delle verghe, che con un estremo si congiungono alle parti flessibili del sistema, coincidono colle equazioni fornite dal metodo degli spostamenti.

Per dimostrar ciò osservo che quando un sistema elastico si deforma, il lavoro molecolare della deformazione è uguale alla somma dei lavori necessari per allontanare o avvicinare le molecole l'una all'altra; e siccome il lavoro necessario per allontanare o avvicinare due molecole in modo che giungano alla posizione finale senza velocità, dipende solo dalla quantità di cui le due molecole sono state allontanate o avvicinate, e non punto dalla legge colla quale ha variato lo sforzo, che ha prodotto l'allontanamento o l'avvicinamento, ne segue che anche la somma dei lavori elementari, ossia il lavoro molecolare fatto nella deformazione del sistema, deve dipendere solo dalla deformazione finale e non dalla legge colla quale hanno variato le forze esterne, che hanno prodotto la deformazione. Cosicchè trovata l'espressione del lavoro molecolare ammettendo che le forze esterne siano cresciute da zero sino al loro valore finale secondo una certa legge, la stessa espressione sarà ancor vera qualunque sia la legge colla quale queste forze hanno variato.

Consideriamo perciò un sistema elastico deformato da forze esterne i cui valori finali siano P, Q, $R \ldots$, e supponiamo che le proiezioni degli spostamenti dei punti di applicazione di queste forze sulle direzioni delle forze medesime siano p, q, $r, \ldots$ Noi sappiamo che questi spostamenti si possono esprimere con funzioni di primo grado di P, Q, $R, \ldots$ senza termini costanti, cosicchè si può porre

$$
\begin{aligned}
p &= \lambda P + \mu Q + \nu R + \ldots, \\
q &= \lambda_1 P + \mu_1 Q + \nu_1 R + \ldots. \\
r &= \lambda_2 P + \mu_2 Q + \nu_2 R + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

essendo $\lambda, \mu, \nu, \ldots \lambda_1, \ldots$ quantità indipendenti da P, Q, $R, \ldots$

Chiamando dunque P', Q', $R', \ldots$ un sistema di valori intermedii delle forze P, Q, $R \ldots$ mentre crescono da zero sino ai loro valori finali, e p', q', $r', \ldots$ gli spostamenti corrispondenti proiettati sulle direzioni delle forze, avremo:

$$
\begin{aligned}
p' &= \lambda P' + \mu Q' + \nu R' + \ldots, \\
q' &= \lambda_1 P' + \mu_1 Q' + \nu_1 R' + \ldots, \\
r' &= \lambda_2 P' + \mu_2 Q' + \nu_2 R' + \ldots. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Se supponiamo le forze P', Q', R',... rispettivamente proporzionali alle P, Q, R,..., avremo:

$$p' = \alpha P', \quad q' = \beta Q', \quad r' = \gamma R', \; \ldots,$$

essendo α, β, γ,... quantità costanti. In questo caso il lavoro della forza P', mentre essa cresce da zero sino al valor massimo P, è espresso da

$$\int_0^p P' dp' = \alpha \int_0^P P' dP' = \frac{\alpha}{2} P^2 = \frac{1}{2} Pp;$$

e perciò il lavoro di tutte le forze esterne applicate al sistema è

$$\frac{1}{2}(Pp + Qq + Rr + \ldots\ldots): \qquad [10]$$

ma il lavoro delle forze esterne dev'essere uguale al lavoro interno o molecolare, e questo è indipendente dalle legge colla quale sono venute crescendo le forze esterne; dunque la formola [10] esprime il lavoro molecolare della deformazione, qualunque sia la legge colla quale hanno variato le forze, che l'hanno prodotta.

Supponiamo ora che alle forze P, Q, R si diano gli incrementi dP, dQ, dR,... e chiamiamo dp, dq, dr,... gli incrementi degli spostamenti p, q, r,...: il lavoro molecolare di questa deformazione infinitesima si potrà esprimere con

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots,$$

oppure, differenziando la formola [10], con

$$\frac{1}{2}(Pdp + Qdq + Rdr + \ldots) + \frac{1}{2}(pdP + qdQ + rdR + \ldots):$$

queste due espressioni dovendo essere equivalenti ne segue

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = pdP + qdQ + rdR + \ldots$$

Ritorniamo ora al sistema, che abbiamo preso a studiare, formato di verghe articolate e di parti flessibili, e chiamiamo p, q, r,... t_1, t_2,... gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze P, Q, R,.... T_1, T_2,.... applicate alle parti flessibili, proiettati sulle direzioni delle forze stesse: il differenziale del lavoro molecolare proveniente dalla deformazione delle parti flessibili si potrà esprimere, secondo quello che abbiam detto testè, colla formola

$$pdP + qdQ + rdR + \ldots + t_1 dT_1 + t_2 dT_2 + \ldots ;$$

ma abbiamo veduto che si esprime anche colla formola

$$\frac{dF}{dP} dP + \frac{dF}{dQ} dQ + \frac{dF}{dR} dR + \ldots$$

$$+ \frac{dF}{dT_1} dT_1 + \frac{dF}{dT_2} dT_2 + \ldots ;$$

dunque queste due espressioni, dovendo essere identiche qualunque siano i valori dei differenziali dP, dQ, dR, ... dT_1, dT_2, ..., bisognerà che sia

$$\frac{dF}{dP} = p, \; \frac{dF}{dQ} = q, \; \frac{dF}{dR} = r, \ldots \frac{dF}{dT_1} = t_1, \; \frac{dF}{dT_2} = t_2, \ldots \qquad [11]$$

Chiamando infine ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ecc. gli spostamenti paralleli agli assi dei punti d'applicazione delle forze T_1, T_2, ecc., si ha

$$t_1 = \xi_1 \cos \alpha_1 + \eta_1 \cos \beta_1 + \zeta_1 \cos \gamma_1 ,$$

$$t_2 = \xi_1 \cos \alpha_2 + \eta_2 \cos \beta_2 + \zeta_2 \cos \gamma_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

e perciò

$$\frac{dF}{dT_1} = \xi_1 \cos\alpha_1 + \eta_1 \cos\beta_1 + \zeta_1 \cos\gamma_1 ,$$

$$\frac{dF}{dT_2} = \xi_2 \cos\alpha_2 + \eta_2 \cos\beta_2 + \zeta_2 \cos\gamma_2 ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

onde vedesi che anche quelle fra le equazioni [9], che contengono le tensioni T_1, T_2, ..., coincidono pienamente con quelle ottenute col metodo degli spostamenti.

8. **Sistemi elastici ritenuti da punti fissi.** — Supponiamo che in un sistema formato soltanto di verghe articolate, alcuni vertici siano fissi. Per applicare il metodo degli spostamenti si può procedere così: si prendono per incognite le variazioni delle coordinate dei vertici, che non sono fissi, e si determinano queste incognite, conosciute le quali si ottengono poi facilmente le tensioni di tutte le verghe, e le componenti parallele agli assi della reazione di ciascun punto fisso. Per applicare allo stesso caso il teorema del minimo lavoro, esprimeremo che il lavoro molecolare del sistema è un minimo, tenendo conto delle tre equazioni di equilibrio relative a ciascuno dei vertici, che non sono fissi: è facile vedere che facendo uso dei moltiplicatori indeterminati, si otterranno così precisamente le stesse equazioni come col metodo degli spostamenti; poichè mancando le equazioni d'equilibrio relative ai vertici fissi, non entreranno nelle equazioni ottenute i moltiplicatori relativi a questi vertici; il che appunto dev'essere, perchè questi moltiplicatori non sono altro che le variazioni delle coordinate dei vertici.

Consideriamo ora un sistema formato di verghe articolate e di parti flessibili, e supponiamo che esso contenga dei punti fissi: se questi punti sono vertici ove concorrano soltanto verghe articolate, si dimostra come nel caso precedente, che il teorema del minimo lavoro e il metodo degli spostamenti conducono alle medesime equazioni.

Se poi i punti fissi appartengono alle parti flessibili del sistema, abbiam già detto nel num. 3, che nel metodo degli spostamenti si supporranno sostituite a ciascun punto fisso tre forze parallele agli assi delle coordinate, e si esprimeranno in funzione di queste forze incognite e di quelle cognite, le variazioni delle coordinate di tutti i vertici del sistema, tenendo sempre conto delle condizioni dei tre vertici V_1, V_2, V_3.

Se le reazioni dei punti fissi fossero note, si avrebbero così tante equazioni quanti sono gli spostamenti incogniti, compresi quelli dei punti fissi: ora se nelle equazioni così ottenute, si pongono eguali a zero gli spostamenti ξ_2, ξ_3, η_3 dei due vertici V_2, V_3 ed i tre spostamenti di ciascuno degli altri punti fissi, e si prendono per incognite la reazione parallela all'asse delle x del vertice V_1, le due componenti parallele agli assi delle x e delle y del vertice V_3 e le tre componenti della reazione di ciascuno degli altri punti fissi, non cambia il numero delle incognite, le quali perciò resteranno ancora tante quante sono le equazioni.

Applichiamo allo stesso caso il teorema del minimo lavoro: siano R'_x, R'_y, R'_z; R''_x, . . . le componenti delle reazioni dei punti fissi V', V'' . . . . e T_1, T_2, . . . le tensioni incognite delle verghe del sistema: suppongasi trovata la espressione del lavoro molecolare del sistema in funzione di tutte queste forze incognite e di quelle cognite, e si rappresenti con

$$F(R'_x\,,\ R'_y\,,\ R'_z\,,\ R''_x\,,\ \ldots\ldots\ T_1\,,\ T_2\,,\ \ldots).$$

Se le reazioni dei punti fissi fossero note, cosicchè non si avesse a tener conto dei ritegni, sappiamo che il teorema del minimo lavoro ci darebbe tante equazioni quante sono le incognite, e le equazioni così ottenute coinciderebbero con quelle date dal metodo degli spostamenti. Queste equazioni non bastano ora che le reazioni degli appoggi sono incognite: ma se si esprime la condizione che il lavoro molecolare sia un minimo rispetto non solo alle tensioni incognite delle verghe, ma anche alle componenti delle reazioni degli appoggi, e si osserva che queste reazioni non entrano nelle equazioni di condizione, si troveranno tutte le equazioni testè dette ed inoltre le seguenti:

$$\frac{dF}{dR'_x}=0, \quad \frac{dF}{dR'_y}=0, \quad \frac{dF}{dR'_z}=0, \quad \frac{dF}{dR''_x}=0, \ldots \qquad [12]$$

onde il numero totale delle equazioni sarà precisamente uguale a quello delle incognite.

Ora, detti ξ', η', ζ' gli spostamenti del punto d'applicazione della reazione (R'_x, R'_y, R'_z), ξ'', η'', ζ'' quelli del punto d'applicazione della reazione (R''_x, R''_y, R''_z), ecc., abbiamo già dimostrato che si ha

$$\frac{dF}{dR'_x}=\xi', \quad \frac{dF}{dR'_y}=\eta', \quad \frac{dF}{dR'_z}=\zeta', \quad \frac{dF}{dR''_x}=\xi'', \ldots;$$

dunque le equazioni [12] equivalgono alle seguenti:

$$\xi'=0, \quad \eta'=0, \quad \zeta'=0, \quad \xi''=0, \ldots,$$

e coincidono quindi con quelle date dal metodo degli spostamenti.

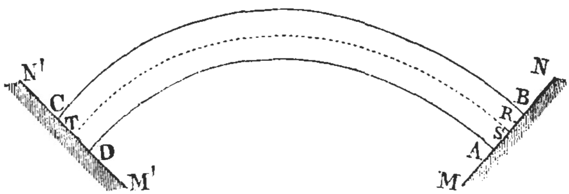
Si può ancora dimostrare in un altro modo, che nel caso considerato il teorema del minimo lavoro e il metodo degli spostamenti conducono allo stesso risultato. Diffatti, suppongasi ciascun punto fisso sostituito da tre aste elastiche parallele agli assi delle coordinate e fisse per le loro estremità opposte: allora le condizioni del sistema saranno cambiate, e per quello che abbiamo dimostrato in generale pei sistemi composti di verghe elastiche e di parti flessibili, il teorema del minimo lavoro e il metodo degli spostamenti conducono agli stessi risultati. Ora, supponiamo che il lavoro molecolare del sistema siasi espresso in funzione delle aste aggiunte e di alcune altre: abbiam veduto che i valori delle tensioni rimaste nell'espressione del lavoro son quelli, che rendono minima quest'espressione tenendo conto delle equazioni di condizione; e questo è vero per quanto piccolo sia il grado di elasticità delle verghe aggiunte, e perciò anche al limite, cioè quando queste verghe sono perfettamente rigide. Ma in questo caso il lavoro delle verghe aggiunte essendo nullo, le tensioni di queste verghe entrano nell'espressione del lavoro molecolare del sistema precisamente come le reazioni dei punti fissi.

Dunque quando in un sistema elastico vi sono dei punti fissi, per trovare gli sforzi sofferti da questi punti e le tensioni delle diverse parti del sistema, si esprimerà il lavoro molecolare del medesimo in funzione di quegli sforzi e di queste tensioni, e si determineranno i valori degli uni e delle altre colla condizione che il lavoro molecolare sia un minimo, tenendo conto delle equazioni di condizione.

9. **Sistemi elastici di cui alcune parti sono incastrate.** — Se una parte flessibile di un sistema elastico trovasi incastrata, si può supporre che ciascun punto della sezione d'incastro sia ritenuto da un pnnto fisso: quindi supponendo applicate a ciascun elemento infinitesimo della sezione tre forze parallele agli assi, si potrà esprimere il lavoro molecolare del sistema in funzione di tutte queste forze incognite; e da quello, che abbiam detto nel numero precedente, intorno al modo di determinare le reazioni dei punti fissi, risulta che le reazioni elementari provenienti dall'incastro si debbono determinare in modo, che il lavoro molecolare del sistema sia un minimo. Ora, tutte queste reazioni elementari si possono ridurre a tre forze parallele

agli assi ed a tre coppie parallele ai piani delle coordinate; dunque anche il lavoro molecolare del sistema si potrà esprimere in funzione di queste sei quantità incognite, le quali si dovranno determinare colla condizione che questo lavoro sia un minimo.

Nel metodo degli spostamenti le tre forze e le tre coppie equivalenti ad un incastro, si determinerebbero colla condizione che la sezione d'incastro non si sposti parallelamente agli assi, nè ruoti intorno agli assi medesimi.



Per mostrare l'utilità di queste considerazioni supponiamo un arco, il cui asse sia una linea curva ST contenuta in un piano verticale, e che sia terminato da due sezioni AB, CD perpendicolari all'asse del solido, per le quali esso si appoggi ai due piani rigidi e senza attrito MN, $M'N'$: supponiamo questo arco caricato solamente da forze contenute nel piano verticale del suo asse e tali, che se il solido fosse perfettamente rigido, esso sarebbe in equilibrio su quei due piani: inoltre, ciascuna sezione abbia uno degli assi principali d'inerzia nel piano, che contiene l'asse del solido.

Sotto l'azione delle forze, che gli sono applicate, il solido si deformerà, e le sezioni d'appoggio AB, CD si sposteranno nei piani MN, $M'N'$: il solido non potrà esercitare su questi piani che delle pressioni normali ai piani stessi, e la risultante P di tutte le pressioni elementari, che esso eserciterà p. es. sul piano MN, è dunque normale a questo piano ed applicata in un punto R posto sull'asse principale d'inerzia ad una certa distanza dal centro S della sezione: in altre parole possiam dire che tutte le pressioni elementari, le quali hanno luogo nella sezione AB, si possono ridurre ad una risultante P perpendicolare al piano MN ed applicata in S, e ad una coppia di momento M contenuta nel piano dell'asse ST. Ora, la risultante P si determina colla condizione che la somma delle componenti parallele alla retta $M'N'$ di tutte le forze applicate al solido, inclusa la reazione dell'appoggio MN, sia nulla; perciò, dopo aver espresso il lavoro molecolare del solido in funzione della risultante P e del momento incognito M, si dovrà determinare questo momento in modo, che esso renda minimo quel lavoro.

Se il solido invece di essere semplicemente appoggiato in CD fosse ivi incastrato, non si avrebbe più la condizione che la somma delle componenti parallele alla retta $M'N'$ di tutte le forze applicate al solido, inclusa la reazione dell'appoggio MN, sia nulla, onde la pressione P non si potrebbe più determinare come nell'altro caso: quindi ottenuta l'espressione del lavoro molecolare del solido in funzione di P e di M, bisogna determinare i valori di queste due incognite in modo che la rendano minima.

Se infine il solido fosse incastrato non solo in CD, ma anche in AB, bisognerebbe aggiungere alla forza P ed alla coppia M, un'altra forza T parallela alla retta MN, perchè l'incastro impedisce lo scorrimento della sezione AB sul piano MN: il lavoro molecolare del solido si esprimerebbe allora in funzione di P, M, T, e si determinerebbero poscia queste quantità colla condizione che lo rendano minimo.

Il problema di cui ho qui indicata la soluzione per mezzo del teorema del minimo lavoro, si può pure risolvere facilmente colla teoria ordinaria della resistenza dei materiali; poichè nel primo caso si determina il momento M colla condizione che la sezione AB combaci ancora dopo la deformazione col piano MN; nel secondo caso le incognite P ed M si trovano colla condizione precedente e coll'altra, che vincola gli spostamenti del punto S parallelamente agli assi delle x e delle y; infine nel terzo caso si determinano tutte tre le incognite P, M, T colla prima condizione e colle due, che si hanno perciò, che gli spostamenti del punto S parallelamente agli assi delle x e delle y sono nulli.

Si vede dunque da queste considerazioni, che quando si studia l'equilibrio di un solido elastico appoggiato per le estremità, non è necessario supporre, come ordinariamente si fa, che la reazione di un appoggio sia applicata nel centro della sezione corrispondente, perchè esprimendo tutte le condizioni a cui il solido deve soddisfare, si potranno determinare completamente le reazioni degli appoggi e i punti in cui esse devono intendersi applicate.

Tuttavia affinchè tutto questo sia esatto, bisogna assicurarsi, dopo fatto il calcolo, che in ciascun punto delle sezioni d'appoggio vi sia effettivamente pressione.

10. **Estensione del teorema del minimo lavoro ad alcuni casi singolari.** — Vi sono alcuni casi ai quali potrebbe sembrare che non fosse applicabile la dimostrazione da me data del teorema del minimo lavoro: tale è quello di una tavola piana e perfettamente rigida, caricata d'un peso in un dato punto e appoggiata sopra un certo numero di sostegni elastici.

Io procurerò di dimostrare che il teorema del minimo lavoro è applicabile a questo caso, e il ragionamento che farò potrà servire di norma per altri casi.

Supponiamo che alla tavola rigida sia sostituito un sistema di verghe elastiche, alcune delle quali concorrano nel punto d'applicazione del peso appoggiato sulla tavola, e che siano tutte congiunte a snodo fra loro e colle estremità delle verghe elastiche, che sostengono la tavola: in questo caso avremo un sistema di sole verghe elastiche congiunte a snodo, ed il teorema del minimo lavoro sarà applicabile. Ora, dalle equazioni di equilibrio in tutti i vertici del sistema, è facile dedurne tre equazioni fra il peso che era appoggiato sulla tavola, e le pressioni dei sostegni, le quali tre equazioni sono quelle forniteci dalla statica: inoltre le tensioni di tutte le verghe del sistema, e perciò anche il lavoro molecolare, si possono esprimere in funzione delle pressioni dei sostegni elastici: dunque, poichè il lavoro molecolare della deformazione dev'essere un minimo rispetto alle tensioni di tutte le verghe del sistema, tenendo conto di tutte le equazioni di condizione, dopo averlo espresso in funzione soltanto delle pressioni dei sostegni, dovrà ancora essere un minimo tenendo conto delle tre sole equazioni, che si hanno fra queste pressioni.

Supponiamo ora che i coefficienti di elasticità delle aste aggiunte vadano indefinitamente crescendo, e perciò il loro lavoro molecolare indefinitamente diminuendo e tendendo verso zero: al limite il lavoro molecolare di tutto il sistema sarà semplicemente uguale alla somma dei lavori dei sostegni elastici, e questo lavoro dovrà essere un minimo tenendo conto delle tre nominate equazioni di equilibrio.

In quanto alle tensioni o pressioni delle aste aggiunte, che al limite si son supposte diventar rigide, è facile riconoscere in generale e provare su alcuni casi particolari, che al limite esse dipendono dai rapporti che si vorranno supporre stabiliti fra i loro coefficienti di elasticità, mentre questi crescono indefinitamente; e siccome questi rapporti sono pienamente arbitrari, vedesi che quelle tensioni rimangono indeterminate, come appunto dev'essere. Vène e Cournot credevano possibile la determinazione delle pressioni e tensioni nei sistemi assolutamente rigidi, ed il signor Mossotti credeva difficile giudicare, se sia possibile trovare un principio atto a determinarle. Ma dalle considerazioni precedenti si vede che questo principio non può esistere; perchè un sistema rigido si può (come asseriscono anche Vène e Cournot) considerare come il limite di un sistema elastico in cui i coefficienti di elasticità crescono indefinitamente, ed affinchè le pressioni o tensioni nel sistema rigido fossero determinate, bisognerebbe che, considerando dapprima il sistema come elastico e determinando le pressioni o tensioni delle diverse parti, i limiti di queste pressioni o tensioni fossero indipendenti dai rapporti stabiliti fra i coefficienti di elasticità, il che non è.

11. **Utilità del teorema del minimo lavoro.** — Il metodo degli spostamenti quale io l'ho esposto, mi pare il più semplice di quelli fin qui adoperati; tuttavia l'uso del teorema del minimo lavoro presenta su quel metodo alcuni notevoli vantaggi, dei quali è facile apprezzare l'importanza.

Il primo consiste in ciò, che mentre col metodo degli spostamenti si è obbligati a cercare separatamente gli spostamenti ξ, η, ζ dei punti d'unione delle verghe colle parti flessibili, il che riesce assai laborioso, il teorema del minimo lavoro fa direttamente conoscere le funzioni di questi spostamenti, che sono necessarie pel calcolo, cioè i trinomii della forma $\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma$.

Il secondo deriva da ciò, che in generale l'espressione del lavoro molecolare si trova assai più facilmente che non le espressioni degli spostamenti.

Il terzo vantaggio, che è forse più importante ancora degli altri due, nasce dall'essere lecito trasformare come torna meglio l'espressione del lavoro molecolare, sia servendosi di alcune delle equazioni di condizione o anche di tutte, sia sostituendo alle variabili, che essa contiene, altre variabili vincolate alle prime da certe relazioni. Per questo terzo vantaggio avviene che in tutti i problemi relativi ai sistemi elastici, si possono scegliere per incognite quelle quantità, colle quali i calcoli riescono più semplici.

Aggiungerò ancora che il teorema del minimo lavoro è indipendente dalla maggiore o minore imperfezione della teoria sulla resistenza dei materiali, e sarà forse tanto più utile quanto più progredirà questa teoria, cioè quanto più si andrà sostituendo ad essa la teoria matematica dell'elasticità dei solidi.

PARTE TERZA.

Applicazioni del teorema del minimo lavoro.

12. Per poter applicare comodamente il teorema del minimo lavoro alla ricerca delle condizioni d'equilibrio dei sistemi elastici, è utile preparare alcune formole per esprimere il lavoro molecolare d'un solido soggetto a sforzi di tensione e compressione, di scorrimento trasversale e di flessione.

I. **Estensione o compressione.** — Consideriamo un solido omogeneo rettilineo e prismatico, sollecitato da una forza P diretta secondo il suo asse ed applicata all'estremità dell'asse medesimo, e da forze dirette pure secondo l'asse e distribuite in modo uniforme e continuo sulla sua lunghezza.

Chiamando p la forza uniformemente distribuita sopra un'unità di lunghezza del solido, la tensione che ha luogo nella sezione posta alla distanza x dall'estremo a cui è applicata la forza P, è $P + px$: il lavoro molecolare che si produce nell'allungamento dell'elemento dx è

$$\frac{1}{2}\,\frac{(P+px)^2}{E\,\Omega}\,dx,$$

chiamando Ω l'area della sezione del solido ed E il coefficiente di elasticità; quindi il lavoro molecolare prodotto nell'allungamento di tutto il solido è

$$\frac{1}{2\mathrm{E}\Omega}\int_0^a (P + px)^2\,dx = \frac{a}{2\mathrm{E}\,\Omega}\left(P^2 + Ppa + \frac{1}{3}p^2 a^2\right),$$

chiamando a la lunghezza del solido.

Il differenziale di questo lavoro rispetto a P è dunque

$$\frac{a}{E\Omega}(P + \frac{1}{2} p a) dP. \qquad [13]$$

II. **Scorrimento trasversale.** — Continuiamo a considerare lo stesso solido, ma supponiamo che le forze P, p siano dirette perpendicolarmente all'asse, e mutiamo P in T: le forze applicate al solido produrranno scorrimento trasversale e flessione, ma considerando per ora soltanto il lavoro proveniente dallo scorrimento trasversale, e chiamando E' il coefficiente di elasticità relativo, si trova che questo lavoro è espresso da

$$\frac{a}{2E'\Omega}(T^2 + Tpa + \frac{1}{3} pa^2),$$

e il suo differenziale rispetto a T da

$$\frac{a}{E'\Omega}(T + \frac{1}{2} p a) dT. \qquad [14]$$

III. **Flessione.** — Infine consideriamo un solido omogeneo rettilineo e prismatico, soggetto a forze le quali lo inflettano in modo che il suo asse si mantenga in un piano: siano m, M i momenti inflettenti relativi alle due estremità, e p il peso uniformemente distribuito sopra ogni unità di lunghezza dell'asse del solido e diretto perpendicolarmente a questo asse nel piano della flessione. Il momento inflettente, rispetto ad una sezione posta alla distanza x dall'estremo a cui è relativo il momento inflettente m, è

$$m + \left(\frac{M - m}{a} - \frac{1}{2} pa\right) x + \frac{1}{2} px^2;$$

e il lavoro molecolare che si produce per causa dell'inflessione nell'elemento dx del solido, chiamando I il momento d'inerzia della sezione ed E il coefficiente di elasticità, è

$$\frac{dx}{2EI}\left[m+\left(\frac{M-m}{a}-\frac{1}{2}pa\right)x+\frac{1}{2}px^2\right]^2.$$

Dunque il lavoro molecolare prodotto nell'inflessione di tutto il solido è

$$\frac{a}{2EI}\left[\frac{M^2+Mm+m^2}{3}-\frac{1}{12}pa^2(M+m)+\frac{1}{120}pa^4\right],$$

ed il suo differenziale rispetto ad M, m è

$$\frac{a}{2EI}\left(\frac{2M+m}{3}-\frac{1}{12}pa^2\right)dM+\frac{a}{2EI}\left(\frac{M+2m}{3}-\frac{1}{12}pa^2\right)dm. \quad [15]$$

Io non considero il caso che il solido sia sottoposto a torsione, perchè nelle costruzioni questo caso non si presenta quasi mai.

13. **Applicazione ad una trave sostenuta in più di due punti.** — Suppongo la trave orizzontale, rettilinea, omogenea, di azione costante, simmetrica rispetto al piano verticale che passa pel suo asse, e caricata di un peso uniformemente distribuito su ciascuna parte contenuta tra due appoggi successivi.

È chiaro che i valori dei momenti inflettenti per le sezioni in corrispondenza degli appoggi, sono funzioni dei pesi distribuiti sul solido e delle pressioni o reazioni degli appoggi; ora, tenendo conto delle due equazioni dateci dalla statica tra i valori di queste reazioni, vedesi che tante di esse rimangono a determinarsi quanti sono gli appoggi, meno due, ossia tante quanti sono i momenti inflettenti sugli appoggi, poichè i momenti inflettenti sugli appoggi estremi sono nulli. Donde segue, che le reazioni degli appoggi si possono esprimere in funzione dei momenti inflettenti relativi agli appoggi medesimi, e perciò possiamo prendere per incognite questi momenti.

Queste incognite si debbono determinare colla condizione che il lavoro molecolare della trave sia un minimo; io trascuro il lavoro proveniente dallo scorrimento trasversale, onde il differenziale del lavoro molecolare di tutta la trave, riesce uguale alla somma di tante espressioni analoghe alla [15], quante sono le parti in cui la trave è divisa dagli appoggi, ossia le travate, avvertendo solo che per l'estrema travata di destra l'espressione [15] si riduce al solo primo termine, perchè $dm = 0$, e per l'estrema di sinistra si riduce al secondo termine, perchè $dM = 0$.

Affinchè il lavoro molecolare sia un minimo, bisogna determinare i momenti inflettenti incogniti, uguagliando a zero i coefficienti dei differenziali di tutti questi momenti. Ora il differenziale del momento inflettente relativo all'appoggio B, non può entrare che in uno dei termini che pro-

vengono dal lavoro della travata AB e in uno di quelli che provengono dal lavoro della travata BC; cosicchè chiamando a e a' le lunghezze di queste due travate, p e p' i pesi uniformemente distribuiti su di esse, m, m', m'' i momenti inflettenti relativi ai tre appoggi A, B, C; E il coefficiente di elasticità della trave ed I il momento d'inerzia della sezione, i due termini che nell'espressione differenziale del lavoro molecolare contengono il differenziale dm' sono

$$\frac{a}{2EI}\left(\frac{m+2m'}{3} - \frac{1}{12}pa^2\right)dm', \quad \frac{a'}{2EI}\left(\frac{2m'+m''}{3} - \frac{1}{12}p'a'^2\right)dm'.$$

Dunque uguagliando a zero il coefficiente di dm', si ottiene

$$am' + 2(a+a')\,m' + m''a' - \frac{1}{4}(pa^3 + p'a'^3) = 0. \qquad [16]$$

È questa appunto l'equazione dovuta a Clapeyron.

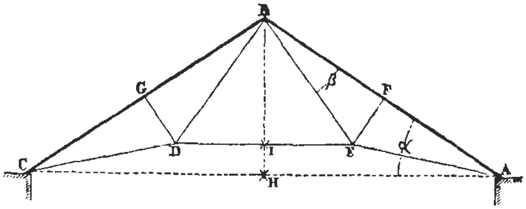
Se la trave è incastrata per le estremità, i momenti inflettenti rispetto alle sezioni estreme non essendo più nulli, l'equazione [15] dà due termini tanto per l'estrema travata di destra quanto per quella di sinistra; inoltre risulta da quello che ho detto intorno ai sistemi di cui alcune parti sono incastrate, che nel caso che ora consideriamo, bisogna render minima l'espressione del lavoro rispetto alle reazioni di tutti gli appoggi e alle due coppie equivalenti ai due incastri; queste coppie non sono altro che i momenti inflettenti relativi ai due appoggi estremi, e siccome in funzione di questi momenti e di quelli intermedii si possono esprimere le reazioni di tutti gli appoggi e il lavoro molecolare del solido, bisognerà uguagliare a zero i coefficienti differenziali dell'espressione di questo lavoro rispetto ai momenti relativi a tutti gli appoggi. Si ottengono così tante equazioni analoghe alla [16] quanti sono gli appoggi intermedii, e pei due appoggi estremi si ottengono le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} 2m_1 + m_2 - \frac{1}{4} p_1 a^2_1 = 0, \\ m_n + 2m_{n+1} - \frac{1}{4} p_n a^2_n = 0, \end{aligned}\right\} [17]$$

detto n il numero delle travate.

Si può ridurre il caso della trave incastrata per le estremità a quello della trave semplicemente appoggiata, supponendo aggiunte lateralmente due travate rigide, perchè allora i momenti inflettenti sugli appoggi estremi della trave elastica non essendo più nulli, e d'altra parte essendo nullo il lavoro molecolare delle due travate rigide, si vede che si otterrà per ciascun appoggio intermedio una equazione analoga alla [16] e per gli appoggi estremi si otterranno le equazioni [17]. Ottenute così le equazioni necessarie per determinare tutti i momenti inflettenti incogniti, non è più necessario nel progresso del calcolo tener conto delle due travate rigide.

14. **Incavallatura semplice del sistema Polonceau.** — Quest'incavallatura è composta di due puntoni AB, BC incastrati in B in una scatola di ghisa, per la quale essi restano congiunti insieme come se formassero un sol pezzo: il sistema è rinforzato dalle colonnette di ghisa EF, DG e dalle verghe di ferro BD, CD, DE, BE, AE.



L'incavallatura si appoggia per le estremità sopra un piano orizzontale, che io suppongo senza attrito, ed è caricata di un peso uniformemente distribuito sui puntoni. Io chiamo p questo peso riferito ad un'unità di lunghezza misurata orizzontalmente; cosicchè detta $2a$ la corda dell'incavallatura, la pressione che questa esercita sopra ciascun appoggio sarà pa; naturalmente nel peso pa entra pure il peso di un puntone; ma il peso delle saette, dei tiranti e della catena è generalmente così piccolo a fronte di quello del puntone, che si suol trascurare.

Per trovare le condizioni d'equilibrio di quest'incavallatura, bisogna esprimere che il lavoro molecolare, il quale si fa nella deformazione di essa, è un minimo, e siccome essa è simmetrica rispetto alla verticale BH, basterà considerarne quella parte, che è alla destra di questa verticale. Questo lavoro molecolare si esprime in funzione delle tensioni delle aste EI, BE, EA, EF, le quali io chiamerò t, t_1, t_2, t_3, e che dovendo farsi equilibrio intorno al punto E sono legate fra loro da due equazioni.

Tenendo le denominazioni poste nella figura, queste due equazioni sono:

$$t + t_1 \cos(\alpha + \beta) - t_2 \cos(\alpha - \beta) - t_3 \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

$$t_1 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - t_2 \operatorname{sen}(\alpha - \beta) + t_3 \cos \alpha = 0,$$

e da esse si trae

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= t_2 - t\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \\ t_3 &= t\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\beta} - 2\,t_2 \operatorname{sen}\beta. \end{aligned}\right\} \quad [18]$$

Chiamando ora m_1, m_2 i momenti inflettenti relativi alle sezioni F, B, trovasi

$$m_1 = t_2\,\frac{a \operatorname{sen}\beta}{2\cos\alpha} - \frac{3}{8}\,pa^2, \qquad m_2 = t\,\frac{a \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta} - \frac{1}{2}pa^2,$$

donde si trae

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{a \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\left(m_2 + \frac{1}{2}\,p\,a^2\right), \\ t_2 &= \frac{2\cos\alpha}{a \operatorname{sen}\beta}\left(m_1 + \frac{3}{8}\,pa^2\right); \end{aligned}\right\} \quad [19]$$

cosicchè si vede che tutte quattro le tensioni incognite t, t_1, t_2, t_3 si possono esprimere in funzione dei due momenti m_1, m_2; i quali perciò si potranno considerare come le sole incognite del problema.

Esprimiamo ora il lavoro molecolare che si fa nella deformazione del sistema, e consideriamo dapprima la parte FA del puntone, di cui chiameremo Ω l'area della sezione, I il momento d'inerzia ed E il coefficiente di elasticità.

Questa parte ha la lunghezza $\frac{a}{2\cos\alpha}$: la componente parallela all'asse del puntone del peso uniformemente distribuito sopra un'unità di lunghezza del medesimo è $p \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$, e la componente perpendicolare è $p \cos^2\alpha$. La forza applicata in A, che tende a produrre la compressione, è

$$P = t_2 \cos\beta + pa \operatorname{sen}\alpha,$$

onde il differenziale del lavoro dovuto alla compressione del solido AF, è (num. 12, I)

$$\frac{a}{2\cos\alpha}\,\frac{1}{\mathrm{E}\Omega}\left(P - \frac{1}{4} pa \operatorname{sen}\alpha\right)\frac{dP}{dm_1}\,dm_1, \tag{20}$$

avvertendo che P può esprimersi in funzione del solo momento m_1. La forza applicata in A, che tende a produrre lo scorrimento trasversale, è

$$T = t_2 \operatorname{sen}\beta - pa \cos\alpha,$$

e quindi il differenziale del lavoro dovuto allo scorrimento del solido AF è (num. 12, II)

$$\frac{a}{2\cos\alpha}\,\frac{1}{\mathrm{E'}\Omega}\left(T + \frac{1}{4} pa \cos\alpha\right)\frac{dT}{dm_1}\,dm_1. \tag{21}$$

Il momento inflettente essendo nullo in A e $= m_1$ in F, il differenziale del lavoro molecolare proveniente dall'inflessione del solido AF è (num. 12, III)

$$\frac{a}{2\cos\alpha}\,\frac{1}{2\mathrm{EI}}\left(\frac{2}{3} m_1 - \frac{1}{48} pa^2\right) dm_1. \tag{22}$$

Passiamo ora alla parte FB del puntone: le forze uniformemente distribuite su questa parte, sono uguali a quelle distribuite sulla parte AF. Lo sforzo di compressione, che ha luogo nel punto B, è

$$P_1 = t \cos\alpha + t_1 \cos\beta + \frac{1}{2} pa \operatorname{sen}\alpha,$$

onde il differenziale del lavoro dovuto alla compressione del solido FB, è

$$\frac{a}{2\cos\alpha}\frac{1}{E\Omega}\left(P_1-\frac{1}{4}pa\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\left(\frac{dP_1}{dm_1}dm_1+\frac{dP_1}{dm_2}dm_2\right). \qquad [23]$$

Lo sforzo di taglio all'estremità F del solido BF è

$$T_1=t\,\mathrm{sen}\,\alpha-t_1\,\mathrm{sen}\,\beta+\frac{1}{2}pa\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,$$

e perciò, il differenziale del lavoro molecolare dovuto allo scorrimento trasversale in questo solido, è

$$\frac{a}{2\cos\alpha}\frac{1}{E'\Omega}\left(T_1-\frac{1}{4}pa\cos\alpha\right)\left(\frac{dT_1}{dm_1}dm_1+\frac{dT_1}{dm_2}dm_2\right). \qquad [24]$$

I momenti inflettenti in F, B essendo m_1, m_2, il differenziale del lavoro molecolare proveniente dall' inflessione del solido FB è

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a}{2\cos\alpha}\frac{1}{2EI}\left(\frac{2m_1+m_2}{3}-\frac{1}{48}pa^2\right)dm_1+\\&+\frac{a}{2\cos\alpha}\frac{1}{2EI}\left(\frac{m_1+2m_2}{3}-\frac{1}{48}pa^2\right)dm_2.\end{aligned}\right\} \qquad [25]$$

Consideriamo per ultimo le quattro verghe EI, EB, EF, EA: chiamando ω, ω_1, ω_2, ω_3 le aree delle loro sezioni, e, e_1, e_2, e_3 i loro coefficienti di elasticità, il differenziale della somma dei loro lavori di estensione o compressione sarà

$$\begin{aligned}&\frac{1}{e\omega}\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}t\,dt+\frac{1}{e_1\omega_1}\frac{a}{2\cos\alpha\cos\beta}t_1\,dt_1+\\&+\frac{1}{e_2\omega_2}\frac{a}{2\cos\alpha\cos\beta}t_2\,dt_2+\frac{1}{e_3\omega_3}\frac{a\,\mathrm{tang}\,\beta}{2\cos\alpha}t_3\,dt_3,\end{aligned}$$

ossia, chiamando per semplicità l, l_1, l_2, l_3, le lunghezze delle quattro verghe,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l\,t}{e\,\omega}\,\frac{dt}{dm_2}\,dm_2 + \frac{l_1\,t_1}{e_1\,\omega_1}\left(\frac{dt_1}{dm_1}\,dm_1 + \frac{dt_2}{dm_2}\,dm_2\right) + \\ &+\frac{l_2\,l_2}{e_2\,\omega_2}\,\frac{dt_2}{dm_1}\,dm_1 + \frac{t_3\,l_3}{e_3\,\omega_3}\left(\frac{dt_3}{dm_1}\,dm_1 + \frac{dt_3}{dm_2}\,dm_2\right) = \\ &= \left(\frac{l_1\,t_1}{e_1\,\omega_1}\,\frac{dt_1}{dm_1} + \frac{t_2\,l_2}{e_2\,\omega_2}\,\frac{dt_2}{dm_1} + \frac{t_3\,l_3}{e_3\,\omega_3}\,\frac{dt_3}{dm_1}\right) dm_1 + \\ &+ \left(\frac{l\,t}{e\,\omega}\,\frac{dt}{dm_2} + \frac{l_1\,t_1}{e_1\,\omega_1}\,\frac{dt_2}{dm_2} + \frac{t_3\,l_3}{e_3\,\omega_3}\,\frac{dt_3}{dm_2}\right) dm_2. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Quando si tratta di esaminare, se un' incavallatura già fatta è stabile, non si può stabilire alcuna relazione fra le tensioni delle verghe e le loro sezioni; ma se si tratta di fare il progetto di un'incavallatura, converrà porre questa condizione, che ciascuna delle quattro verghe si trovi sottoposta precisamente a quello sforzo che essa può sopportare permanentemente; cosicchè chiamando r, r_1, r_2, r_3 i coefficienti di resistenza permanente delle quattro verghe, si porrà

$$t = r\,\omega, \quad t_1 = r_1\,\omega_1, \quad t_2 = r_2\,\omega_2, \quad t_3 = r_3\,\omega_3, \tag{27}$$

e l'espressione [26] diverrà

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{l_1\,r_1}{e_1}\,\frac{dt_1}{dm_1} + \frac{l_2\,r_2}{e_2}\,\frac{dt_2}{dm_1} + \frac{l_3\,r_3}{e_3}\,\frac{dt_3}{dm_1}\right) dm_1 + \\ &+ \left(\frac{l\,r}{\omega}\,\frac{dt}{dm_2} + \frac{l_1\,r_1}{e_1}\,\frac{dt_1}{dm_2} + \frac{l_3\,r_3}{e_3}\,\frac{dt_3}{dm_2}\right) dm_2. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

In quest'espressione, i due polinomi contenuti entro le parentesi essendo costanti, possiamo rappresentarli colle lettere A_1, A_2, onde avremo in luogo della formola [28] la seguente

$$A_1\,dm_1 + A_2\,dm_2. \tag{29}$$

Facendo ora la somma delle espressioni [20], [21], [22],

[23], [24], [25], [28] e poscia uguagliando a zero i coefficienti di dm_1, dm_2, si ottengono le due equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{E\Omega}\left[\left(P-\frac{1}{4}pa\operatorname{sen}\alpha\right)\frac{dP}{dm_1}+\left(P_1-\frac{1}{4}pa\operatorname{sen}\alpha\right)\frac{dP_1}{dm_1}\right]+\\
&+\frac{1}{E'\Omega}\left[\left(T+\frac{1}{4}pa\cos\alpha\right)\frac{dT}{dm_1}+\left(T_1+\frac{1}{4}pa\cos\alpha\right)\frac{dT}{dm_1}\right]+\\
&+\frac{1}{6EI}\left(4m_1+m_2-\frac{1}{8}pa^2\right)+\frac{2\cos\alpha}{a}A_1=0,\\
&\frac{1}{E\Omega}\left(P_1-\frac{1}{4}pa\operatorname{sen}\alpha\right)\frac{dP_1}{dm_2}+\frac{1}{E'\Omega}\left(T_1+\frac{1}{4}pa\cos\alpha\right)+\\
&+\frac{1}{6EI}\left(m_1+2m_2-\frac{1}{16}pa^2\right)+\frac{2\cos\alpha}{a}A_2=0.
\end{aligned}\right\}\quad[30]$$

Queste formole si possono semplificare notevolmente nella maggior parte dei casi, trascurando i termini che provengono dal lavoro di compressione e di scorrimento trasversale del puntone: difatti, se si suppone p. es. che la sezione trasversale del puntone sia un rettangolo e si chiamano b e c la base e l'altezza, si ha

$$I=\frac{1}{12}bc^3=\frac{1}{12}\Omega c^2,\text{ e quindi }\frac{a^2}{6EI}=\frac{2}{E\Omega}\left(\frac{a}{c}\right)^2;$$

e siccome il rapporto $\frac{a}{c}$ è generalmente molto grande, ne segue che i termini contenenti il fattore $\frac{a^2}{6EI}$ sono generalmente molto grandi a fronte di quelli che contengono il fattore $\frac{1}{E\Omega}$, cosicchè questi ultimi si possono trascurare a fronte dei primi.

Con questa semplificazione le equazioni [30] diventano

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{6EI}\left(4m_1+m_2-\frac{1}{8}pa^2\right)+\frac{2\cos\alpha}{a}A_1=0,\\&\frac{1}{6EI}\left(m_1+2m_2-\frac{1}{16}pa^2\right)+\frac{2\cos\alpha}{a}A_2=0,\end{aligned}\right\}\quad[31]$$

e sono semplicissime.

Se inoltre si trascura anche il lavoro molecolare delle quattro verghe *EI*, *EB*, *EF*, *EA*, il che però io credo che non si possa fare, almeno in questo caso, le due equazioni precedenti diventano

$$\left.\begin{aligned}&4m_1+m_2-\frac{1}{8}pa^2=0,\\&m_1+2m_2-\frac{1}{16}pa^2=0,\end{aligned}\right\}\quad[32]$$

dalle quali si trae

$$m_1=\frac{3}{112}pa^2,\qquad m_2=\frac{1}{56}pa^2.$$

Sostituendo questi valori di m_1, m_2 nelle espressioni di t, t_1, t_2, t_3, trovasi

$$\left.\begin{aligned}&t=\frac{29}{28}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}pa,\quad t_2=\frac{45}{56}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}pa,\quad t_3=-\frac{4}{7}pa\cos\alpha,\\&t_1=\frac{45}{56}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}pa-\frac{29}{28}\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}pa=\\&=\left(\frac{29}{28}\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}-\frac{13}{16}\right)\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}pa:\end{aligned}\right\}\quad[33]$$

ma non bisogna dimenticare, che avendo io trascurato il lavoro molecolare delle quattro verghe, il risultato, che ho ttenuto, è lo stesso come se avessi supposte le verghe perfettamente rigide: nel quale caso non potrebbero variare nè la corda nè la monta dell' incavallatura. Allora i tre punti A, F, B dovendo restare fissi, e l'asse del puntone dovendosi inflettere fra questi tre punti e restare tangente in B alla retta AB, vedesi facilmente che esso si disporrà secondo una curva, la quale fra B ed F dovrà presentare due punti di flesso, essendo convessa verso l'esterno della incavallatura da B sino al più vicino punto di flesso, poi concava fra questo e l'altro punto di flesso, ed infine nuovamente convessa fra questo secondo punto e il punto F. Segue da ciò che il momento inflettente in B e in F deve necessariamente essere positivo, e che perciò la tensione t della verga EI [19] deve riuscire maggiore, che se il momento inflettente in B fosse nullo come quando i due puntoni sono semplicemente appoggiati.

Se invece le verghe sono elastiche, può crescere la corda e diminuire la monta dell'incavallatura, e allora il puntone BA si dispone generalmente in modo che fra i punti B, F presenta un solo punto di flesso, essendo la curva concava verso l'esterno tra questo punto e il punto B, convessa tra lo stesso punto e il punto F: ne segue che il momento inflettente in B riesce negativo, e che perciò la tensione t [19] riesce minore di quella corrispondente al caso dei due puntoni semplicemente appoggiati l'uno contro l'altro.

Da questa discussione si vede quanto si possa errare trascurando nelle formole alcuni dei termini, senza essersi dapprima assicurati che essi sono molto piccoli a fronte di quelli conservati. Si vede inoltre, che volendo fare il calcolo di un'incavallatura semplice del sistema Polonceau, tenendo conto dell'incontro dei puntoni alla loro estremità superiore, bisognerà determinare i momenti inflettenti m_1, m_2 colle formole [31].

15. **Incavallatura Polonceau coi puntoni appoggiati l'un contro l'altro.** — In questo caso si ha

$$t = pa \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \qquad [34]$$

onde si trae dalle formole [19] e [18]

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= t_2 \frac{a \operatorname{sen} \beta}{2 \cos \alpha} - \frac{3}{8} pa^2, \quad m_2 = 0\,, \\ t_1 &= t_2 - pa \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \\ t_3 &= pa \cos \alpha - 2\, t_2 \operatorname{sen} \beta, \end{aligned}\right\} [35]$$

dalle quali equazioni risulta, che le tensioni t_1, t_2, t_3 si possono esprimere in funzione del momento m_1.

Possiamo ora ottenere rapidamente le espressioni differenziali dei lavori molecolari delle diverse parti del sistema, ponendo nelle formole [20], [21], [22], [23], [24], [25], [29] $m_2=0$, $dm_2=0$. Sommando poscia tutti i risultati così ottenuti ed uguagliando a zero il coefficiente di dm_1, otterremo l'equazione

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E\Omega}\left[\left(P - \frac{1}{4} pa \operatorname{sen} \alpha\right)\frac{dP}{dm_1} + \left(P_1 - \frac{1}{4} pa \operatorname{sen}\alpha\right)\frac{dP_1}{dm_1}\right] + \\ &+ \frac{1}{E'\Omega}\left[\left(T + \frac{1}{4} pa \cos\alpha\right)\frac{dT}{dm_1} + \left(T_1 + \frac{1}{4} pa \cos\alpha\right)\frac{dT_1}{dm_1}\right] + \\ &+ \frac{1}{6EI}\left(4m_1 - \frac{1}{8} pa^2\right) + \frac{2\cos\alpha}{a} A_1 = 0, \end{aligned}\right\} [36]$$

avendo A_1 lo stesso significato come nel numero precedente, ed avvertendo che nelle espressioni P, T, P_1, T_1, la tensione t non è incognita come nel numero precedente, ma ha il valore [34].

Se si trascura il lavoro molecolare dovuto alla compressione e allo scorrimento trasversale del puntone, il che ho dimostrato potersi generalmente fare, si ottiene l'equazione semplicissima

$$\frac{1}{6EI}\left(4m_1 - \frac{1}{8} pa^2\right) + \frac{2\cos\alpha}{a} A_1 = 0.$$

Se inoltre si trascura anche il lavoro proveniente dalla estensione o dalla compressione delle verghe, il che però non è dimostrato che si possa fare, si ottiene l'equazione

$$4m_1 - \frac{1}{8}pa^2 = 0,$$

dalla quale si trae

$$m_1 = \frac{1}{32}pa^2. \qquad [37]$$

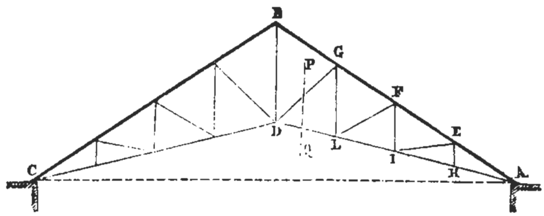
Sostituendo questo valore di m_1, nelle espressioni delle tensioni t_1, t_2, t_3, si ottiene

$$\left.\begin{aligned} t_2 &= \frac{13}{16}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}, \qquad t_3 = -\frac{5}{8}pa\cos\alpha, \\ t_1 &= \left(\frac{13\cos\alpha}{16\operatorname{sen}\beta} - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right)pa = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} - \frac{3}{16}\right)\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}pa. \end{aligned}\right\} [38]$$

Sono questi appunto i risultati, che trovansi ordinariamente nei trattati di costruzione: ma intanto dalla precedente analisi si vede chiaramente quali siano le ipotesi che implicitamente si ammettono per giungere a questi risultati: di più si vede che sarebbe un po' più lungo ma non punto più difficile valutare gli sforzi sofferti dalle diverse parti dell'incavallatura considerata, con tutta l'approssimazione che comporta la teoria ordinariamente adottata sulla resistenza dei solidi.

In ambidue questi esempi si ponga mente al modo di trovare le tensioni delle verghe, dopo aver determinati i momenti inflettenti incogniti: ordinariamente si considera il puntone come appoggiato su tre punti fissi A, F, B, si trovano i momenti inflettenti relativi a questi punti e le pressioni sui punti medesimi, poscia se ne deducono le tensioni delle verghe con scomposizioni di forze che non sempre sono chiare e semplici.

16. **Metodo generale pel calcolo approssimato delle incavallature metalliche.** — Proponiamoci di determinare gli sforzi sofferti dalle diverse parti dell'incavallatura *ABC*, rinforzata da sette tiranti verticali, da sei tiranti inclinati e dalla catena *ADC*, essendo tutto simmetricamente disposto rispetto alla verticale *BD*. Conside-



rando soltanto la parte *BAD*, sappiamo che per determinare gli sforzi sopportati dalle diverse parti di essa, bisogna stabilire dapprima per ciascuno dei vertici *H*, *I*, *L* le due equazioni di equilibrio, e pel vertice *D* soltanto quella, la quale esprime che la somma delle componenti delle tensioni è zero; poi esprimere che il lavoro molecolare di tutto il sistema è un minimo, tenendo conto delle equazioni precedenti. Ora, se si trascura il lavoro molecolare di tutte le verghe e quello proveniente dalla compressione e dallo scorrimento trasversale dei puntoni, si dovrà solsoltanto esprimere che è un minimo il lavoro proveniente dall'inflessione dei puntoni. Questo lavoro si può esprimere in funzione dei momenti inflettenti *E*, *F*, *G*, *B*, i quali momenti sono funzioni delle tensioni delle undici verghe, che appartengono alla parte *BAD* dell'incavallatura; e siccome fra le tensioni di questi tiranti si hanno sette equazioni, combinandole con quelle quattro, che esprimono i momenti inflettenti relativi ai punti *E*, *F*, *G*, *B*, si potranno ottenere le tensioni delle undici verghe in funzione dei quattro momenti inflettenti. Donde segue che volendo render minimo il lavoro proveniente dall'inflessione del puntone AB, basterà differenziare l'espressione di questo lavoro ottenuta in funzione dei soli quattro momenti considerati, ed uguagliare a zero i coefficienti differenziali del lavoro rispetto a questi momenti medesimi, con che si ottengono quattro equazioni, che bastano a determinarli.

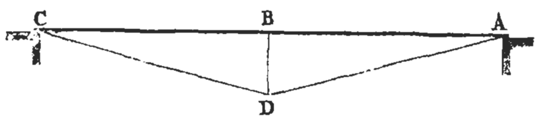
Ma è facile vedere che procedendo in questo modo, si fanno precisamente le stesse operazioni come per trovare i momenti inflettenti relativi ai punti E, F, G, B, se la trave BA fosse incastrata in B, appoggiata in G, F, E, A sopra appoggi fissi e caricata d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza e perpendicolare al suo asse. Potremo dunque applicare direttamente l'equazione di Clapeyron fra i momenti inflettenti su tre appoggi successivi, la quale abbiam veduto nel N° 13 come si ottenga col teorema del minimo lavoro. Trovati i quattro momenti incogniti, si possono trovar direttamente, come già abbiam detto, le tensioni delle undici verghe.

Io ho voluto considerar qui un caso particolare per la chiarezza dell'esposizione, ma si vede facilmente che la conclusione a cui son giunto si applica a tutte le incavallature, e più in generale a tutti i sistemi elastici, in cui le tensioni di tutte le verghe si possono esprimere in funzione di alcuni momenti inflettenti. Se in B havvi semplicemente appoggio, come ordinariamente si suppone, immaginando tagliate le verghe DG, DL con un piano qualunque PQ, vedesi che le tensioni di queste verghe, la reazione dell'appoggio in A e il peso distribuito sul puntone debbono farsi equilibrio intorno al punto B; donde segue che si avranno otto equazioni fra le tensioni delle undici verghe, ed aggiungendovi le tre, che esprimono in funzione di queste tensioni i momenti inflettenti relativi ai punti E, F, G, si potranno esprimere le undici tensioni in funzione di questi momenti. Quindi trovati essi per mezzo del teorema di Clapeyron, si otterranno facilmente le tensioni delle undici aste.

Finora per determinare gli sforzi delle diverse parti di un'incavallatura del genere di quella considerata, si soleva bensì considerare il puntone come appoggiato nei punti A, E, F, G, B, ma credo che nessuno avesse mai giustificato abbastanza questo modo di procedere, ed avesse fatto vedere quali sono le quantità che si trascurano, il che è pure tanto necessario per poter valutare il grado di esattezza, che con tale calcolo si può raggiungere.

17. **Applicazione alle travi armate.** — Applicherò qui le considerazioni precedenti a due esempi di travi armate.

La prima è composta di una trave AC di legno, rinforzata dalla colonnetta BD perpendicolare alla trave nel suo punto di mezzo, e dai due tiranti uguali AD, CD. Chia-



mando $2a$ la lunghezza AC, β l'angolo BAD, t la tensione dei tiranti, t_1 la pressione della saetta, p il peso uniformemente distribuito sopra ogni unità di lunghezza della trave, trovasi dapprima che le reazioni degli appoggi nei punti A, C sono ambedue uguali a pa; inoltre si ha

$$t_1 = 2\, t \operatorname{sen} \beta, \qquad [39]$$

e il momento inflettente rispetto al punto B è

$$m = t\, a \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{2} p a^2; \qquad [40]$$

onde la tensione t e la pressione t_1 si possono esprimere in funzione di m. Per determinare poi questo momento, il teorema di Clapeyron ci dà

$$4\,am - \frac{1}{2}pa^3 = 0:$$

avremo dunque

$$m = \frac{1}{8}pa^2, \quad t = \frac{5}{8}\frac{pa}{\operatorname{sen}\beta}, \quad t_1 = \frac{5}{4}pa,$$

come appunto trovasi nei trattati di costruzioni.

La seconda trave armata è rinforzata dalle due saette BE, CF congiunte a snodo alla trave e ai tiranti AE, EF,

FD. Io chiamo $2a$ la lunghezza AD della trave, p il peso uniformemente distribuito sopra ogni unità di lunghezza di essa, e supponendo $AB = BC = CD = \frac{2}{3}a$, $BE = CF$, chiamo β l'angolo BAE, t, t_1 le tensioni dei tiranti AE, EF, t_2 la pressione delle saette: naturalmente i due tiranti AE, DF son supposti della stessa sostanza e della stessa grossezza, e così pure le due saette BE, CF.

Si ha dapprima

$$t\cos\beta - t_1 = 0, \quad t_2 - t\operatorname{sen}\beta = 0, \tag{41}$$

ed i momenti inflettenti relativi ai punti B, C sono ambidue

$$m = t.\frac{2}{3}\alpha\operatorname{sen}\beta - \frac{4}{9}pa^2. \tag{42}$$

Ora il teorema di Clapeyron ci dà

$$5\,m - \frac{2}{9}\,pa^2 = 0, \quad m = \frac{2}{45}\,pa^2,$$

onde dalle equazioni [42], [41] si trae

$$t = \frac{11}{15}\,\frac{pa}{\operatorname{sen}\beta}; \quad t_1 = \frac{11}{15}\,\frac{pa}{\operatorname{tang}\beta}; \quad t_2 = \frac{11}{15}\,pa.$$

Sono questi appunto i risultati che trovansi riferiti nei trattati di costruzioni.