All'amico collega Luigi Lino Campari
l'autore

INTORNO ALL'EQUILIBRIO

DEI

SISTEMI ELASTICI

MEMORIA

DI

CASTIGLIANO ALBERTO

INGEGNERE DELLE STRADE FERRATE
DELL'ALTA ITALIA

STAMPERIA REALE DI TORINO
DI G. B. PARAVIA E C.
1875.

Estr. dagli *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. X.
Adunanza del 24 Gennaio 1875.

INTORNO ALL'EQUILIBRIO

DEI

SISTEMI ELASTICI

INTRODUZIONE.

L'anno 1857 il Generale Luigi Federico MENABREA lesse all'Accademia delle Scienze di Torino una Memoria, ove propose e cercò di dimostrare un nuovo teorema, che egli chiamò *principio di elasticità* o *del minimo lavoro*, secondo il quale quando un sistema elastico si deforma per l'azione di forze esterne, le tensioni finali, che hanno luogo nel sistema, son quelle, che rendono minima l'espressione del lavoro molecolare fatto nella deformazione. L'anno appresso comunicò all'Accademia di Parigi le sue ricerche sullo stesso soggetto.

Non essendo però sembrata accettabile la dimostrazione del Generale MENABREA, questi pubblicò l'anno 1867 un'altra Memoria, nella quale dopo aver fatto vedere sopra alcuni esempi particolari che il suo teorema conduceva in quei casi a risultati esatti, ne propose una nuova dimostrazione generale. La quale però pare non essere stata giudicata più rigorosa della prima, perchè non ostante la grande bellezza e la evidente utilità del teorema del minimo lavoro, nessuno, ch'io sappia, credette di poterne trarre partito prima dell'anno 1872, in cui l'Ing. Giovanni Sacheri lesse alla Società degli Ingegneri ed industriali di Torino una sua Memoria, nella quale si provò ad applicare quel teorema all'esame della stabilità delle centine della grande tettoia nello scalo di Arezzo. Però di questa Memoria non mi occorre parlare, perchè, contenendo solo un esempio numerico, non fece punto progredire la dimostrazione del teorema.

Al principio dell'anno 1873 in alcune mie ricerche intorno all'equilibrio dei sistemi elastici, dopo aver pensato un metodo, che doveva certamente condurre a risultati esatti, mi proposi di confrontarlo col teorema del minimo lavoro, pensando che se questo era falso, l'avrei facilmente riconosciuto con alcuni esempi; e se era vero, avrei forse trovato in quel confronto la via per dimostrarlo in modo generale.

Nel proseguire quest'idea mi parve di trovarmi nel secondo caso, e nella mia dissertazione di laurea pubblicai il risultato delle mie ricerche.

Debbo ora aggiungere per imparzialità che non fu il Generale Menabrea il primo a proporre il teorema del minimo lavoro, o almeno egli non lo trovò di pianta, senza che prima fosse stato preceduto da teoremi analoghi. Già il Capitano Vène nel 1827 aveva proposto un *principio*, secondo il quale quando *un corpo rigido* (cioè non elastico) s'appoggia per più di due punti sopra una retta o per più di tre punti sopra un piano, la pressione del corpo contro la retta o il piano si distribuisce sui diversi punti d'appoggio in modo da rendere minima la somma dei quadrati delle pressioni. Se invece di dire un corpo rigido si dice un corpo elastico, il principio di Vène è talvolta vero e può riguardarsi come un caso particolare di quello di Menabrea.

L'anno 1828 A. Cournot pubblicò nel Bollettino di matematiche di Férussac una Memoria, in cui estese il principio di Vène, e cercò di dimostrarlo, benchè, per vero dire, la sua dimostrazione non sia altro che un giro vizioso. In questa Memoria di Cournot alcuni hanno voluto vedere il teorema del minimo lavoro in tutta la sua generalità. Ma è da avvertire che Cournot parla dapprima del modo di determinare le pressioni di un corpo *rigido*, che per più punti si appoggi ad un altro, poi considera il caso di due corpi *assolutamente rigidi* congiunti da verghe *assolutamente rigide;* infine estende il suo teorema al caso di un *corpo rigido*, che s'appoggi sopra *sostegni elastici.* In quest'ultimo caso il teorema di Cournot è vero ed è contenuto in quello di Menabrea. Ma Cournot non è andato più innanzi, cioè non ha inteso di enunciare un teorema generale applicabile a tutti i sistemi elastici.

Difatti parlando, quasi alla fine della sua Memoria, dell'importanza di conoscere come si distribuisce la pressione di un corpo su' suoi sostegni, così si esprime: « La connaissance de la manière dont les pressions sont effectivèment et individuellement réparties est donc indispensable; et *quoique nos formules ne la donnent que pour le cas abstrait de la rigidité absolue*, il est clair que la résolution de ce cas abstrait jette de la lumière sur celle des différents cas de la nature. C'est de la sorte que toutes les théories des mathématiques pures sont applicables aux besoins de la pratique ».

Del resto poco importa chi sia, che abbia pel primo trovato il teorema del minimo lavoro; chè in questa come in tutte le altre scoperte si è proceduto per gradi, e tutti vi han merito quelli, che vi hanno contribuito. Abbiano dunque Vène e Cournot e anche Pagani e Mossotti, ma più di tutti MENABREA, il merito d'aver intuito il teorema; e se a me sarà riuscito di darne una dimostrazione rigorosa, e di farne vedere l'utilità, mi reputerò ricompensato abbastanza, per quanto sia piccola quella parte di merito, che gli intelligenti crederanno essermi dovuta.

Ed ora dirò il perchè di questo scritto: da quando ho stampata la mia dissertazione, io son sempre venuto meditandola, quando mi è stato possibile; e benchè ne sia stato distolto per mesi intieri dalle molteplici occupazioni del mio impiego e da altre estranee, pure mi pare di aver trovato alcune nuove dimostrazioni più semplici o più rigorose di quelle, che io aveva dato dapprima: inoltre per rendere più evidente agli Ingegneri il partito, ch'essi possono trarre dal teorema del minimo lavoro, ne ho fatto l'applicazione all'esame della stabilità delle centine della tettoia nello scalo di Bra. Non ho riprodotto qui alcuna delle importanti applicazioni, che io ho fatto nella mia dissertazione per non estendermi troppo.

Io non so se questa Memoria conterrà qualche cosa di buono; e tuttavia spero che mi sarà perdonato l'averla pubblicata, perchè colle mie ricerche, per quanto siano esse poca cosa, potrei pure avere spianato ad altri la via o a porre affatto fuori di dubbio la verità teorema del minimo lavoro e trarne conseguenze ancora ignote, o a dimostrarne la falsità; il che sarebbe pur sempre una verità acquistata alla scienza.

EQUILIBRIO

DEI

SISTEMI ELASTICI

---

1. Consideriamo un sistema formato di verghe elastiche congiunte a snodo e sollecitato da forze applicate a' suoi vertici; e riferiamolo a tre assi ortogonali, dei quali l'origine sia in un vertice, l'asse delle x passi per un altro vertice, e il piano delle xy passi per un terzo vertice non posto coi due primi sulla medesima retta: supponiamo che nella deformazione del sistema i tre assi si spostino seguendo i tre vertici testè nominati. In tal modo, avendo riguardo solo alla deformazione del sistema e non al suo moto assoluto nello spazio, sarà come se gli assi fossero immobili, il vertice, che è nell'origine, vi fosse fisso, quello che trovasi sull'asse delle x potesse muoversi soltanto su questo asse, e quello, che è nel piano delle xy, non potesse uscire da questo piano.

Chiamiamo V_p un vertice qualunque del sistema, x_p, y_p, z_p le sue coordinate prima della deformazione, X_p, Y_p, Z_p le componenti, parallele agli assi, della forza applicatagli; ξ_p, η_p, ζ_p gli incrementi delle sue coordinate per causa della deformazione, ossia i suoi spostamenti parallelamente agli assi. Chiamiamo ancora $V_p V_q$ la verga, che congiunge i due vertici V_p, V_q, Ω_{pq} l'area della sua sezione, l_{pq} la sua lunghezza, E_{pq} il coefficiente d'elasticità della sostanza di cui è composta, λ_{pq} il suo allungamento per causa della deformazione e T_{pq} la sua tensione finale; α_{pq}, β_{pq}, γ_{pq} e α'_{pq}, β'_{pq}, γ'_{pq} gli angoli, che essa fa cogli assi prima e dopo la deformazione.

Pel vertice, che è nell'origine e che riguardiamo come fisso, prenderemo $p=0$, per quello posto sull'asse delle x, $p=1$, e per quello contenuto nel piano delle xy, $p=2$; onde avremo

$$\xi_0=0\,,\quad \eta_0=0\,,\quad \zeta_0=0\,,\quad \eta_1=0\,,\quad \zeta_1=0\,,\quad \zeta_2=0 \quad (1)\,.$$

Inoltre posto in generale

$$\frac{E_{pq}\Omega_{pq}}{l_{pq}}=\varepsilon_{pq} \qquad \ldots\ldots \quad (2)\,,$$

avremo

$$T_{pq}=\varepsilon_{pq}\lambda_{pq}$$

$$l_{pq}=\sqrt{(x_q-x_p)^2+(y_q-y_p)^2+(z_q-z_p)^2}\,,$$

e

$$l_{pq}+\lambda_{pq}=\sqrt{(x_q-x_p+\xi_q-\xi_p)^2+(y_q-y_p+\eta_q-\eta_p)^2+(z_q-z_p+\zeta_q-\zeta_p)^2}$$

Se le differenze $\xi_q-\xi_p$, $\eta_q-\eta_p$, $\zeta_q-\zeta_p$ sono piccolissime a fronte delle altre x_q-x_p, y_q-y_p, z_q-z_p, potremo sviluppare λ_{pq} in serie convergente ordinata colle potenze ascendenti di quelle piccole differenze, il che ci dà

$$\lambda_{pq}=\frac{x_q-x_p}{l_{pq}}(\xi_q-\xi_p)+\frac{y_q-y_p}{l_{pq}}(\eta_q-\eta_p)+\frac{z_q-z_p}{l_{pq}}(\zeta_q-\zeta_p)+\theta_{pq}\,,$$

ove θ_{pq} comprende tutti i termini dello sviluppo, che contengono le potenze di $\xi_q-\xi_p$,... superiori alla prima, e perciò il suo rapporto con λ_{pq} ha per limite zero, quando le differenze $\xi_q-\xi_p$,.... tendono verso zero.

Ora, si ha

$$\frac{x_q-x_p}{l_{pq}}=\cos\alpha_{pq}\,,\qquad \frac{y_q-y_p}{l_{pq}}=\cos\beta_{pq}\,,\qquad \frac{z_q-z_p}{l_{pq}}=\cos\gamma_{pq}\,,$$

dunque

$$\lambda_{pq}=(\xi_q-\xi_p)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}+\theta_{pq} \quad (3).$$

Gli angoli α'_{pq}, β'_{pq}, γ'_{pq}, che la verga V_pV_q fa cogli assi dopo la deformazione sono dati dalle equazioni

$$\cos\alpha'_{pq}=\frac{x_q-x_p+\xi_q-\xi_p}{l_{pq}+\lambda_{pq}}\,, \quad \text{ecc.}$$

ossia, sviluppando anche qui in serie convergente ordinata colle potenze positive e crescenti di $\xi_q-\xi_p$, $\eta_q-\eta_p$, $\zeta_q-\zeta_p$,

$$\cos\alpha'_{pq}=\frac{x_q-x_p}{l_{pq}}+\omega_{pq}^{(x)}=\cos\alpha_{pq}+\omega_{pq}^{(x)}$$

$$\cos\beta'_{pq}=\frac{y_q-y_p}{l_{pq}}+\omega_{pq}^{(y)}=\cos\beta_{pq}+\omega_{pq}^{(y)}$$

$$\cos\gamma'_{pq}=\frac{z_q-z_p}{l_{pq}}+\omega_{pq}^{(z)}=\cos\gamma_{pq}+\omega_{pq}^{(z)}$$

ove $\omega_{pq}^{(x)}$, $\omega_{pq}^{(y)}$, $\omega_{pq}^{(z)}$ sono funzioni, che non contengono alcun termine costante, e perciò hanno per limite zero quando le differenze $\xi_q-\xi_p$, $\eta_q-\eta_p$, $\zeta_q-\zeta_p$ tendono verso zero.

2. Dopo la deformazione il sistema essendo in equilibrio, è chiaro che le tensioni di tutte le verghe concorrenti nel vertice V_p debbono fare equilibrio alle forze esterne X_p, Y_p, Z_p; onde avremo le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} X_p+\Sigma T_{pq}\cos\alpha'_{pq}=0\ ;\\ Y_p+\Sigma T_{pq}\cos\beta'_{pq}=0\ ;\\ Z_p+\Sigma T_{pq}\cos\gamma'_{pq}=0\ ;\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

ove la somma indicata del simbolo Σ è relativa a tutti i valori di q corrispondenti ai vertici congiunti per mezzo di verghe al vertice V_p.

Per ciascun vertice del sistema eccettuati i tre V_0, V_1, V_2 si hanno tre equazioni analoghe alle precedenti: per V_0, che deve riguardarsi come fisso, non si ha alcuna equazione; per V_1, che non può uscire dall'asse delle x, se ne ha una sola, e per V_2, che può muoversi soltanto nel piano delle xy, se ne hanno due. Ne segue che si hanno tante equazioni quanti sono gli spostamenti ξ_p, η_p, ζ_p, ξ_q,...., onde questi possono essere determinati, e perciò anche le tensioni di tutte le verghe dopo la deformazione.

Però le equazioni (4) e le loro analoghe sono assai complicate, ed il risolverle rigorosamente è cosa praticamente impossibile: la soluzione diventa invece assai semplice, se ci contentiamo di risultati approssimati, però talmente approssimati, che si potranno in generale riguardare come esatti.

Difatti abbiamo

$$T_{pq}\cos\alpha'_{pq}=\varepsilon_{pq}\left[\begin{array}{l}(\xi_q-\xi_p)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}\\+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}+\theta_{pq}\end{array}\right]\left(\cos\alpha_{pq}+\omega^{(x)}_{pq}\right)$$

$$=\varepsilon_{pq}\left\{\begin{array}{l}[(\xi_q-\xi_p)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}]\cos\alpha_{pq}\\+[(\xi_q-\xi_p)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}]\omega^{(x)}_{pq}\\+\theta_{pq}\cos\alpha_{pq}+\omega^{(x)}_{pq}\theta_{pq}\end{array}\right\}:$$

ora nel secondo membro vedesi che dei quattro termini contenuti entro la parentesi esterna, il primo è del primo grado rispetto alle differenze $\xi_q-\xi_p$, $\eta_q-\eta_p$, $\zeta_q-\zeta_p$, gli altri tre contengono solo le potenze di queste differenze, di grado superiore al primo; perciò il rapporto fra la somma dei tre ultimi termini e il primo ha per limite zero quando le dette differenze tendono verso zero.

Dunque se queste sono piccolissime, come avviene sempre in pratica, i tre ultimi termini si possono trascurare a fronte del primo, il che ci dà

$$T_{pq}\cos\alpha'_{pq} =$$
$$\varepsilon_{pq}[(\xi_q-\xi_p)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}]\cos\alpha_{pq}.$$

Ma vedesi che in questo modo si viene a supporre

$$T_{pq}=\varepsilon_{pq}[(\xi_q-\xi_p)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}] \quad (5),$$
$$\cos\alpha'_{pq}=\cos\alpha_{pq} \ ,$$

cioè nell'espressione delle tensioni si tengono soltanto i termini del primo grado degli spostamenti, e le direzioni delle verghe si considerano come invariabili nella deformazione.

E qui si avverta che se le tensioni si vogliono esprimere colla formola (5), bisogna necessariamente supporre $\alpha'_{pq}=\alpha_{pq}$, $\beta'_{pq}=\beta_{pq}$, ecc. cioè supporre invariabili le direzioni delle verghe, perchè se si accettasse quella formola e tuttavia si volesse tener conto del cambiamento di direzione delle verghe, si cadrebbe in quest'assurdo, che nell'espressione di $T_{pq}\cos\alpha'_{pq}$ si terrebbe conto del termine

$$\varepsilon_{pq}[(\xi_q-\xi_p)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}]\omega^{(x)}_{pq}$$

e si trascurerebbe l'altro

$$\varepsilon_{pq}\theta_{pq}\cos\alpha_{pq} \ ,$$

che è dello stesso ordine di grandezza.

Dunque invece delle equazioni (4) e delle loro analoghe, avremo, per determinare dapprima tutti gli spostamenti e poscia le tensioni finali di tutte le verghe del sistema, le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
X_1 + \Sigma T_{1q} \cos\alpha_{1q} = 0 \\
X_2 + \Sigma T_{2q} \cos\alpha_{2q} = 0 \ ; \quad Y_2 + \Sigma T_{2q} \cos\beta_{2q} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_p + \Sigma T_{pq} \cos\alpha_{pq} = 0 \ ; \quad Y_{pq} + \Sigma T_{pq} \cos\beta_{pq} = 0 \ ; \\
Z_{pq} + \Sigma T_{pq} \cos\gamma_{pq} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \dots \ (6)$$

3. ***Teorema del minimo lavoro.*** — Il lavoro molecolare prodotto nella deformazione dell'asta $V_p V_q$ si può esprimere colla formola

$$\frac{1}{2} \frac{T^2_{pq}}{\varepsilon_{pq}} \ ,$$

quindi il lavoro molecolare della deformazione di tutto il sistema, si può esprimere colla formola

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{T^2_{pq}}{\varepsilon_{pq}} \quad \dots\dots (7) \ .$$

Or bene, io dico che *le tensioni delle verghe del sistema dopo la deformazione son quelle, che soddisfanno alle equazioni* (6) *e rendono minima l'espressione del lavoro molecolare del sistema.*

Per comprender bene il significato di questo teorema si osservi che le equazioni (6) sono in numero di $3n - 6$ chiamando n il numero dei vertici: quindi, se il numero delle verghe è $3n - 6$ (minore non può mai essere, se il sistema, supposto rigido, dev'essere di forma invariabile), le equazioni (6) servono a determinare le tensioni di tutte le verghe *indipendentemente dalle deformazioni:* ma se il numero delle verghe è maggiore di $3n - 6$, come avviene generalmente, il numero delle tensioni incognite supera quello delle equazioni (6), le quali perciò non bastano più a determinare quelle tensioni senza esprimerle dapprima in funzione degli spostamenti dei vertici. Senza ciò le equazioni (6) possono essere soddisfatte da un'infinità di sistemi di valori delle tensioni, e a ciascuno di essi corrisponde un diverso valore dell'espressione

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{T^2_{pq}}{\varepsilon_{pq}}:$$

ebbene, il teorema enunciato consiste in ciò che fra tutti questi sistemi di tensioni, quello che ha effettivamente luogo dopo la deformazione delle verghe, è quello che rende minima l'espressione (7).

Difatti per trovare i valori delle tensioni T_{pq}, che soddisfanno a questa condizione, si ha l'equazione

$$\Sigma\frac{T_{pq}\,d\,T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=0 \qquad \ldots\ldots (8)$$

ove i differenziali $d\,T_{pq}$ sono vincolati fra loro dalle equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma d\,T_{1q}\cos\alpha_{1q}=0\\
\Sigma d\,T_{2q}\cos\alpha_{2q}=0\ ,\ \Sigma d\,T_{2q}\cos\beta_{2q}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Sigma d\,T_{pq}\cos\alpha_{pq}=0\ ,\ \Sigma d\,T_{pq}\cos\beta_{pq}=0\ ,\ \Sigma d\,T_{pq}\cos\gamma_{pq}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(9),$$

le quali si ottengono differenziando le (6).

Moltiplichiamo ciascuna delle equazioni (9) per un coefficiente costante, e chiamiamo in generale A_p, B_p, C_p i coefficienti pei quali si moltiplicano le tre equazioni relative al vertice V_p, indi sommiamo i primi membri delle equazioni (9) moltiplicati pei coefficienti costanti col primo membro dell'equazione (8), ed uguagliamo a zero i coefficienti di tutti i differenziali delle tensioni: otterremo così tante equazioni quante sono queste tensioni: p. es. uguagliando a zero il coefficiente di T_{pq}, si ottiene l'equazione,

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=(A_q-A_p)\cos\alpha_{pq}+(B_q-B_p)\cos\beta_{pq}+(C_q-C_p)\cos\gamma_{pq}\ ,$$

la quale non differisce dalla (5) *se non pel cambiamento delle lettere* ξ, η, ζ *nelle lettere* A, B, C.

Ora combinando le equazioni così ottenute colle equazioni (6) si ottengono dapprima i valori delle costanti A_p, B_p, C_p,..., e poscia quelli delle tensioni T_{pq}. Ma poichè l'equazione precedente e le sue analoghe non differiscono dalla (5) e dalle sue analoghe se non pel cangiamento delle lettere ξ, η, ζ nelle lettere A, B, C, è evidente che si troveranno per le costanti A_p, B_p, C_p, ecc. gli stessi valori, che si sarebbero ottenuti per gli spostamenti ξ_p, η_p, ζ_p ..., e perciò i valori delle tensioni, che così si otterranno sono effettivamente quelli, che hanno luogo dopo la deformazione.

È dunque dimostrato pei sistemi articolati il teorema del minimo lavoro; e qui ripeto quello che ho detto testè, cioè che *le costanti*, *per le quali si moltiplicano le equazioni* (9), *non sono altro che gli spostamenti dei vertici parallelamente agli assi.*

4. *Espressione del lavoro molecolare di un sistema articolato.* — Riprendiamo la formola (5), la quale può porsi sotto la forma.

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} + \xi_p \cos\alpha_{pq} + \eta_p \cos\beta_{pq} + \zeta_p \cos\gamma_{pq}$$
$$+ \xi_q \cos\alpha_{qp} + \eta_q \cos\beta_{qp} + \zeta_q \cos\gamma_{qp} = 0 \;;$$

moltiplicandola per T_{pq} si ottiene

$$\frac{T^2_{pq}}{\varepsilon_{pq}} + \xi_p T_{pq} \cos\alpha_{pq} + \eta_p T_{pq} \cos\beta_{pq} + \zeta_p T_{pq} \cos\gamma_{pq}$$
$$+ \xi_q T_{pq} \cos\alpha_{pq} + \eta_q T_{pq} \cos\beta_{pq} + \zeta_q T_{pq} \cos\gamma_{pq} = 0 \;.$$

Applicando quest'equazione a tutte le verghe del sistema, sommando membro a membro tutte le equazioni così ottenute, e raccogliendo insieme tutti i termini, che contengono il medesimo spostamento, si ottiene

$$\Sigma\frac{T^2{}_{pq}}{\varepsilon_{pq}}+\xi_1\Sigma T_{1q}\cos\alpha_{1q}+\xi_2\Sigma T_{2q}\cos\alpha_{2q}+\eta_2\Sigma T_{2q}\cos\beta_{2q}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\xi_p\Sigma T_{pq}\cos\alpha_{pq}+\eta_p\Sigma T_{pq}\cos\alpha_{pq}+\zeta_p\Sigma T_{pq}\cos\gamma_{pq}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ =0$$

ora dalle equazioni (6) si ha

$$\Sigma T_{1q}\cos\alpha_{1q}=-X_1\ ,\quad \Sigma T_{2q}\cos\alpha_{2q}=-X_2\ ,\quad \Sigma T_{2q}\cos\beta_{2q}=-Y_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma T_{pq}\cos\alpha_{pq}=-X_p\ ,\quad \Sigma T_{pq}\cos\beta_{pq}=-Y_p\ ,\quad \Sigma T_{pq}\cos\gamma_{pq}=-Z_p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dunque l'equazione precedente diventa

$$\Sigma\frac{T^2{}_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=X_1\xi_1+X_2\xi_2+Y_2\eta_2+\ldots\ldots$$
$$+X_p\xi_p+Y_p\eta_p+Z_p\zeta_p+\ldots\ldots,$$

ossia, più brevemente,

$$\Sigma\frac{T^2{}_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=\Sigma(X_p\xi_p+Y_p\eta_p+Z_p\zeta_p)\ .$$

Dicasi R_p la risultante delle tre forze X_p, Y_p, Z_p, ed r_p, la proiezione dello spostamento del vertice V_p sulla direzione della forza R_p: si ha

$$X_p\xi_p+Y_p\eta_p+Z_p\zeta_p=R_pr_p$$

onde

$$\Sigma\frac{T^2{}_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=\Sigma R_pr_p\ .$$

Il primo membro di quest'equazione esprime il doppio del lavoro molecolare proveniente dalla deformazione del sistema, dunque questo lavoro può anche esprimersi in funzione delle forze esterne e degli spostamenti dei vertici colla formola

$$\frac{1}{2}\Sigma R_p r_p \ (*).$$

5. Io passerò ora ad esaminare il caso che un sistema si trovi già in equilibrio sotto l'azione di forze esterne, quando vi si applicano le nuove forze delle quali vuolsi studiare l'effetto; il qual caso è appunto quello più frequente in natura.

Può anche avvenire che in un sistema le diverse parti si trovino tese o premute già prima dell'applicazione delle forze esterne: tale è il caso per es. di un quadrilatero articolato formato con sei verghe disposte secondo i lati e le diagonali, se una delle verghe non ha naturalmente quella precisa lunghezza, che la lunghezza naturale delle altre cinque richiede: or bene anche questo caso è incluso in quello ch'io qui tratto.

Forse a taluno parrà inutile il presente numero; pure non so risolvermi a sopprimerlo, sembrandomi ch'esso giovi a rendere più completa e rigorosa la mia dimostrazione.

Siano X^0_p, Y^0_p, Z^0_p le componenti, parallele agli assi, della forza applicata da principio al vertice V_p; X_p, Y_p, Z_p le componenti della forza, che si applica dopo allo stesso vertice, ξ_p, η_p, ζ_p gli spostamenti del medesimo prodotti dall'applicazione delle nuove forze al sistema, α_p, β_p, γ_p gli angoli della verga $V_p V_q$ cogli assi prima della nuova deformazione; T^0_{pq} la tensione della verga $V_p V_q$ prima dell'applicazione delle forze X_p, Y_p, Z_p, ecc., e T_{pq} l'incremento di quella tensione prodotto da queste forze.

Poichè il sistema è in equilibrio prima dell'applicazione

(*) Il ragionamento col quale ho ottenuto questa formola, mi pare che per semplicità e rigore non lasci più nulla a desiderare.

delle forze X_p, Y_p, Z_p, ecc., e vi ritorna dopo, avremo i due gruppi di equazioni:

$$\left.\begin{array}{ll}
X^0_1 + \Sigma\, T^0_{1q} \cos\alpha_{1q} = 0\ , & \\
X^0_2 + \Sigma\, T^0_{2q} \cos\alpha_{2q} = 0\ , & Y^0_2 + \Sigma\, T^0_{2q} \cos\beta_{2q} = 0\ , \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
X^0_p + \Sigma\, T^0_{pq} \cos\alpha_{pq} = 0\ , & Y^0_p + \Sigma\, T^0_{pq} \cos\beta_{pq} = 0\ , \\
Z^0_p + \Sigma\, T^0_{pq} \cos\gamma_{pq} = 0 & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (10)\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l}
X^0_1 + X_1 + \Sigma\,(T^0_{1q} + T_{1q}) \cos\alpha_{1q} = 0\ , \\
X^0_2 + X_2 + \Sigma\,(T^0_{2q} + T_{2q}) \cos\beta_{2q} = 0\ , \\
Y^0_2 + Y_2 + \Sigma\,(T^0_{2q} + T_{2q}) \cos\gamma_{2q} = 0\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X^0_p + X_{pq} + \Sigma\,(T^0_{pq} + T_{pq}) \cos\alpha_{pq} = 0\ , \\
Y^0_p + Y_{pq} + \Sigma\,(T^0_{pq} + T_{pq}) \cos\beta_{pq} = 0\ , \\
Z^0_p + Z_{pq} + \Sigma\,(T^0_{pq} + T_{pq}) \cos\gamma_{pq} = 0\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad \dots\dots\ (11)\ ;$$

dal secondo dei quali sottraendo il primo si ottiene quest'altro:

$$\left.\begin{array}{ll}
X_1 + \Sigma\, T_{1q} \cos\alpha_{1q} = 0\ , & \\
X_2 + \Sigma\, T_{2q} \cos\alpha_{2q} = 0\ , & Y_2 + \Sigma\, T_{2q} \cos\beta_{2q} = 0\ , \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
X_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\alpha_{pq} = 0\ , & Y_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\beta_{pq} = 0\ , \\
Z_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\gamma_{pq} = 0 & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad \dots\dots\ (12).$$

Ora il lavoro molecolare della verga $V_p V_q$ mentre la sua tensione passa da T^0_{pq} a $T^0_{pq} + T_{pq}$ è espresso da

$$\frac{(T^0_{pq} + T_{pq})^2 - T^{0^2}_{pq}}{2\,\varepsilon_{pq}} = \left(T^0_{pq} + \frac{1}{2}\, T_{pq}\right) \frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}\ ,$$

quindi il lavoro molecolare di tutto il sistema, da

$$\Sigma \left(T^0_{pq} + \frac{1}{2}\, T_{pq}\right) \frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}\ .$$

Abbiamo poi

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=(\xi_p-\xi_q)\cos\alpha_{pq}+(\eta_q-\eta_p)\cos\beta_{pq}+(\zeta_q-\zeta_p)\cos\gamma_{pq}$$

ossia

$$\begin{aligned}\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=&-\xi_p\cos\alpha_{pq}-\eta_p\cos\beta_{pq}-\zeta_p\cos\gamma_{pq}\\&-\xi_q\cos\alpha_{qp}-\eta_q\cos\beta_{qp}-\zeta_q\cos\gamma_{qp}\ .\end{aligned}$$

Moltiplicando quest'equazione per $T^{\circ}_{pq}+\frac{1}{2}T_{pq}$ e facendo la somma di tutte le equazioni, che così si ottengono per tutte le verghe del sistema, risulta

$$\Sigma\left(T^0_{pq}+\frac{1}{2}T_{pq}\right)\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=$$

$$\sum\left[\begin{aligned}&-\xi_p\Sigma\left(T^0_{pq}+\frac{1}{2}T_{pq}\right)\cos\alpha_{pq}-\eta_p\Sigma\left(T^0_{pq}+\frac{1}{2}T_{pq}\right)\cos\beta_{pq}\\&-\zeta_p\Sigma\left(T^0_{pq}+\frac{1}{2}T_{pq}\right)\cos\gamma_{pq}\end{aligned}\right]$$

ossia, eliminando per mezzo delle equazioni (10) e (12) le somme contenute dentro le parentesi,

$$\left.\begin{aligned}&\sum\left(T^0_{pq}+\frac{1}{2}T_{pq}\right)\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=\\&\sum\left[\left(X^0_p+\frac{1}{2}X_p\right)\xi_p+\left(Y^0_p+\frac{1}{2}Y_p\right)\eta_p+\left(Z^0_p+\frac{1}{2}Z_p\right)\zeta_p\right]\end{aligned}\right\}(13).$$

È questa dunque l'espressione del lavoro molecolare in funzione delle forze esterne.

Se le forze esterne X°_p, Y°_p, Z°_p, sono nulle, l'espressione del lavoro molecolare si riduce a

$$\sum\left(T^0_{pq}+\frac{1}{2}T_{pq}\right)\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=\frac{1}{2}\Sigma(X_p\xi_p+Y_p\eta_p+Z_p\zeta_p)\quad\ldots\ldots\quad(14)$$

qualunque siano le tensioni iniziali T°_{pq} delle verghe.

6. Se nella formola (13) si suppongono le forze X_p, Y_p, Z_p infinitamente piccole, onde anche gli incrementi T_{pq} delle tensioni delle verghe, e gli spostamenti ξ_p, η_p, ζ_p, ecc. dei vertici saranno infinitamente piccoli, e se si cambiano X_p, Y_p, Z_p, ..., ξ_p, η_p, ζ_p, ..., T_{pq}, ... in $dX^o{}_p$, $dY^o{}_p$, $dZ^o{}_p$, ..., $d\xi^o{}_p$, $d\mu^o{}_p$, $d\zeta^o{}_p$, ..., $dT^o{}_{pq}$ ..., poi si sopprime dappertutto per semplicità l'indice o, e si trascurano gli infinitesimi del secondo ordine, si ottiene, per esprimere l'incremento del lavoro molecolare prodotto dagli incrementi dati alle forze esterne, la formola

$$\Sigma \frac{T_{pq} d T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} = \Sigma (X_p d\xi_p + Y_p d\eta_p + Z_p d\zeta_p) .$$

Ora, differenziando la formola (14), il primo membro ci dà:

$$\Sigma \frac{(T^o{}_{pq} + T_{pq}) d T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} ,$$

e siccome $T^o{}_{pq} + T_{pq}$ esprime la tensione dell'asta $V_p V_q$ dopo l'applicazione delle forze esterne X_p, Y_p, Z_p, ... al sistema, la qual tensione nella formola precedente è stata rappresentata con T_{pq}, potremo scrivere, per mantenere nelle due formole gli stessi simboli, T_{pq} invece di $T^o{}_{pq} + T_{pq}$: ciò posto differenziando l'equazione (14) si ottiene:

$$\Sigma \frac{T_{pq} d T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} = \frac{1}{2} \Sigma (X_p d\xi_p + Y_p d\eta_p + Z_p d\zeta_p)$$
$$+ \frac{1}{2} \Sigma (\xi_p d X_p + \eta_p d Y_p + \zeta_p d Z_p) .$$

Uguagliando le due espressioni ottenute di $\Sigma \frac{T_{pq} d T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}$, risulta

$$\Sigma (X_p d\xi_p + Y_p d\eta_p + Z_p d\zeta_p) = \Sigma (\xi_p d X_p + \eta_p d Y_p + \zeta_p d Z_p) \quad (15) ,$$

cosicchè l'incremento del lavoro molecolare prodotto dagli incrementi dX_p, dY_p, dZ_p, ... dati alle forze esterne, può esprimersi sia col primo membro dell'equazione (15), sia col secondo.

Se le forze esterne hanno direzioni costanti, che è il solo caso, che mi importi considerare, chiamando R_p la risultante delle forze X_p, Y_p, Z_p, e λ_p, μ_p, ν_p gli angoli, che essa fa cogli assi, si ha

$$X_p d\xi_p + Y_p d\eta_p + Z_p d\zeta_p$$
$$= R_p (d\xi_p \cdot \cos\lambda_p + d\eta_p \cdot \cos\mu_p + d\zeta_p \cdot \cos\nu_p) \ ,$$

ossia, chiamando dr_p lo spostamento elementare del vertice V_p proiettato sulla direzione della forza R_p,

$$X_p d\xi_p + Y_p d\eta_p + Z_p d\zeta_p = R_p dr_p \ .$$

Ma si ha ancora

$$dX_p = dR_p \cdot \cos\lambda_p \ , \ dY_p = dR_p \cdot \cos\mu_p \ , \ dZ_p = dR_p \cos\nu_p \ ,$$

dunque

$$\xi_p dX_p + \eta_p dY_p + \zeta_p dZ_p$$
$$= dR_p \cdot (\xi_p \cos\lambda_p + \eta_p \cos\mu_p + \zeta_p \cos\nu_p) = r_p dR_p \ ,$$

e perciò l'equazione (15) può anche scriversi

$$\Sigma R_p dr_p = \Sigma r_p dR_p \ . \qquad (16)$$

Avvertasi però che l'equazione (15) è vera sempre, mentre la (16) lo è soltanto quando la direzione delle forze esterne è costante.

Osservazione. — La formola

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} = (\xi_q - \xi_p)\cos\alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p)\cos\beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p)\cos\gamma_{pq}$$

applicata a tutte le verghe del sistema e combinata colle equazioni (12) nello stesso modo come nel num. 4 ci conduce alla formola

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{T^2_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=\frac{1}{2}\Sigma(X_p\xi_p+Y_p\eta_p+Z_p\zeta_p)\ ,$$

onde dalla (13) si ha

$$\sum\frac{T^0_{pq}\,T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}=\Sigma(X^0_p\,\xi_p+Y^0_p\,\eta_p+Z^0_p\,\zeta_p)\ .$$

Ora, $\frac{1}{2}\sum\frac{T^2_{pq}}{\varepsilon_{pq}}$ esprime il lavoro molecolare del sistema, proveniente dai soli incrementi T_{pq} delle tensioni delle verghe, come se le tensioni iniziali T^0_{pq} fossero nulle; e $\sum\frac{T^0_{pq}\,T_{pq}}{\varepsilon_{pq}}$ esprime il lavoro molecolare del sistema, che le tensioni primitive T^0_{pq} producono in causa dell'allungamento delle verghe dovuto agli incrementi T_{pq} delle loro tensioni: dunque i secondi membri delle due equazioni precedenti ci danno questi due lavori in funzione delle forze esterne e degli spostamenti dei vertici.

Vedesi poi facilmente dalle cose precedenti, che il teorema del minimo lavoro è vero anche per un sistema articolato, nel quale le tensioni iniziali non siano nulle, o che trovisi già in equilibrio sotto l'azione di forze qualunque, quando vi si applicano quelle delle quali vuolsi studiare l'effetto, purchè prendasi per espressione del lavoro molecolare quella del lavoro prodotto da queste ultime forze, come se le altre non esistessero e le tensioni iniziali delle verghe fossero nulle.

7. ***Proprietà principale del teorema del minimo lavoro.*** — In un sistema articolato qualunque immaginiamo una superficie S, la quale racchiuda entro sè un certo numero di vertici: alcune verghe saranno tagliate dalla superficie S, cioè congiungeranno i vertici V_r, V_r', ... interni a questa superficie, coi vertici V_s, V_s', ... esterni ad essa, e le loro tensioni le rappresenteremo con T_{rs}, $T_{r's'}'$, ecc.

Il lavoro molecolare prodotto nella deformazione del sistema si esprime colla formola $\frac{1}{2}\sum\frac{T^2_{pq}}{\varepsilon_{pq}}$, la quale si può porre sotto la forma $L+L'$, chiamando L la somma di tutti i termini relativi alle verghe interne alla superficie S ed L' la somma di tutti gli altri relativi alle verghe esterne alla superficie S o tagliate da essa.

Uguagliando a zero il lavoro molecolare del sistema si ottiene:

$$dL+dL'=0 \; .$$

Differenziamo ora le equazioni (6) come nel num. (3), moltiplichiamo ciascuna per una costante indeterminata, e sommiamo i prodotti coll' equazione precedente: possiamo dividere quelle equazioni in due gruppi, dei quali uno comprenda le equazioni di equilibrio relative ai vertici posti entro la superficie S, e l'altro quelle relative ai vertici posti fuori: la somma dei termini provenienti dal primo gruppo la rappresento con

$$dM+\Sigma(A_r\cos\alpha_{rs}+B_r\cos\beta_{rs}+C_r\cos\gamma_{rs})\,dT_{rs}$$

mettendo così a parte tutti i termini contenenti le tensioni delle verghe tagliate dalla superficie S: la somma dei termini provenienti dal secondo gruppo la rappresento con dM'. Otterremo dunque l'equazione

$$dL+dL'+dM+dM'+\Sigma(A_r\cos\alpha_{rs}+B_r\cos\beta_{rs}+C_r\cos\gamma_{rs})dT_{rs}=0 \; .$$

Per trovare le tensioni di tutte le verghe del sistema, bisogna uguagliare a zero i coefficienti dei differenziali di tutte le tensioni contenute nell' equazione precedente, e combinare le equazioni così ottenute con quelle di equilibrio intorno a tutti i vertici. Ora è facile vedere che i termini dL, dM contengono soltanto le tensioni delle verghe chiuse entro la superficie S e non possono contenerne altre, e che gli altri termini non possono contenere alcuna di tali tensioni. Dunque l'equazione trovata si scinde subito in due:

$$dL + dM = 0 \ ,$$

$$dL' + dM' + \Sigma (A_r \cos \alpha_{rs} + B_r \cos \beta_{rs} + C_r \cos \gamma_{rs}) dT_{rs} = 0 \ .$$

La prima è precisamente quella, che si sarebbe ottenuta considerando il sistema contenuto entro la superficie S come un sistema libero e riguardando le tensioni delle verghe tagliate dalla superficie S come forze esterne: perciò uguagliando a zero i coefficienti di tutti i differenziali contenuti nell'equazione $dL + dM = 0$ e combinando le equazioni così ottenute con quelle di equilibrio nei vertici contenuti entro la superficie S, è chiaro che si otterranno i valori delle costanti A_r, B_r, C_r, e delle tensioni di tutte le verghe contenute entro la superficie S, in funzione delle tensioni delle verghe, che ne sono tagliate.

Ma risulta dal num. 3 che se i tre vertici V_0, V_1, V_2 dei quali il primo si riguarda come fisso e posto nell'origine, il secondo costretto a stare sull'asse delle x, e il terzo a stare nel piano delle xy, sono tre vertici contenuti entro la superficie S, i valori delle costanti A_r, B_r, C_r non sono altro che gli spostamenti del vertice V_r parallelamente agli assi. Dunque chiamando t_r lo spostamento del vertice V_r proiettato sulla direzione della verga $V_r V_s$, si ha

$$t_r = A_r \cos \alpha_{rs} + B_r \cos \beta_{rs} + C_r \cos \gamma_{rs} \ ,$$

onde la seconda delle equazioni sopra trovate diventa

$$dL'+dM'+\Sigma t_r d T_{rs}=0 \qquad \ldots\ldots (17);$$

e siccome risulta dal num. 2 che la direzione delle verghe devesi riguardare come costante nella deformazione, ne segue, come è stato dimostrato nel num. 6, che la somma $t_r d T_{rs}$ non è altro che il differenziale del lavoro del sistema contenuto entro la superficie S, rispetto alle tensioni delle verghe tagliate da essa: perciò la somma

$$dL'+\Sigma t_r d T_{rs}$$

esprime il differenziale del lavoro molecolare di tutto il sistema in funzione delle tensioni delle verghe esterne alla superficie S o tagliate da essa.

Dunque l'equazione (17) è la stessa, che si sarebbe ottenuta esprimendo che il lavoro molecolare di tutto il sistema espresso in funzione soltanto delle verghe esterne alla superficie S o tagliate da essa è un minimo, e tenendo conto delle equazioni di equilibrio nei vertici esterni alla superficie S.

Siccome d'altra parte sappiamo che uguagliando a zero i coefficienti di tutti i differenziali contenuti nell'equazione (17) e combinando le equazioni ottenute con quelle d'equilibrio nei vertici esterni alla superficie S si ottengono le tensioni di tutte le verghe esterne a questa superficie o tagliate da essa, conchiudiamo, che *se di un sistema articolato deformato da date forze si sa esprimere il lavoro molecolare di una parte contenuta entro una certa superficie S in funzione delle tensioni delle verghe, che congiungono questa parte alla rimanente, si otterranno le tensioni di queste verghe e di quelle esterne alla superficie S esprimendo che il lavoro molecolare di tutto il sistema è un minimo, tenuto* *conto delle equazioni di equilibrio intorno a tutti i vertici esterni alla superficie S.*

8. ***Spostamenti dei vertici in funzione delle forze esterne.*** — Abbiamo veduto che il lavoro molecolare proveniente dalla deformazione di un sistema può esprimersi con

$$\frac{1}{2}\Sigma(X_p\xi_p+Y_p n_p+Z_p\zeta_p)$$

e il suo differenziale con

$$\Sigma(\xi_p dX_p+n_p dY_p+\zeta_p dZ_p)\ .$$

Ora, quando avremo trovate le tensioni di tutte le verghe in funzione delle forze esterne, otterremo facilmente in funzione di queste forze anche il lavoro molecolare di tutto il sistema. Detto L questo lavoro il suo differenziale rispetto alla variazione delle forze esterne sarà:

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dX_p}dX_p+\frac{dL}{dY_p}dY_p+\frac{dL}{dZ_p}dZ_p\right)$$

onde avremo

$$\Sigma(\xi_p dX_p+n_p dY_p+\zeta_p dZ_p)=\Sigma\left(\frac{dL}{dX_p}dX_p+\frac{dL}{dY_p}dY_p+\frac{dL}{dZ_p}dZ_p\right)\ ;$$

e poichè quest'equazione deve sussistere qualunque siano gli incrementi dX_p, dY_p, dZ_p, ..., ne segue in generale

$$\frac{dL}{dX_p}=\xi_p\ ,\quad \frac{dL}{dY_p}=n_p\ ,\quad \frac{dL}{dZ_p}=\zeta_p\ .$$

Sia R_p la risultante delle forze X_p, Y_p, Z_p e α, β, γ gli angoli di una retta qualunque cogli assi: detta P la proiezione della forza R_p sulla retta (α, β, γ) si ha

$$P=X_p\cos\alpha+Y_p\cos\beta+Z_p\cos\gamma\ :$$

ora, siccome le forze X_p, Y_p, Z_p sono uguali alla R_p moltiplicata pei coseni degli angoli, che essa fa cogli assi, vedesi che il lavoro L può esprimersi in funzione delle sole forze esterne R_p e quindi anche in funzione soltanto delle loro proiezioni P. Supponendola espressa in tal modo si ottiene

$$\frac{dL}{dX_p} = \frac{dL}{dP}\frac{dP}{dX_p} = \frac{dL}{dP}\cos\alpha \;, \quad \frac{dL}{dY_p} = \frac{dL}{dP}\cos\beta \;,$$

$$\frac{dL}{dZ_p} = \frac{dL}{dP}\cos\gamma \;,$$

e sommando queste equazioni, dopo averle moltiplicate ordinatamente per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, risulta

$$\frac{dL}{dX_p}\cos\alpha + \frac{dL}{dY_p}\cos\beta + \frac{dL}{dZ_p}\cos\gamma = \frac{dL}{dP} \;,$$

ossia

$$\frac{dL}{dP} = \xi_p\cos\alpha + \eta_p\cos\beta + \zeta_p\cos\gamma \;.$$

Chiamando σ_p lo spostamento del vertice V_p proiettato sulla direzione P, si ha

$$\sigma_p = \xi_p\cos\alpha + \eta_p\cos\beta + \zeta_p\cos\gamma \;,$$

dunque avremo ancora

$$\frac{dL}{dP} = \sigma_p \;;$$

cioè *differenziando il lavoro molecolare di un sistema articolato espresso in funzione delle forze applicate a' suoi vertici, rispetto alla forza applicata in un vertice proiettata in una data direzione, la derivata, che si ottiene, esprime lo spostamento del vertice considerato proiettato sulla direzione data.*

Ne segue che la derivata dell'espressione del lavoro molecolare rispetto alla risultante R_p è la proiezione dello spostamento del vertice V_p sulla direzione R_p.

Non si dimentichi che tutto questo è vero soltanto se le direzioni delle forze sono costanti, perchè altrimenti gli angoli α_p, β_p, γ_p che la forza R_p fa cogli assi sarebbero funzioni di questa forza, e nel prendere le derivate si otterrebbero altri termini oltre quelli scritti.

9. ***Sistemi articolati ritenuti da punti fissi.*** — Supponiamo che in un sistema articolato alcuni vertici siano fissi. Sia V_r uno di essi: chiamando $-X_r$, $-Y_r$, $-Z_r$ le componenti, parellele agli assi, della pressione, che questo vertice esercita sul punto di ritegno, è chiaro che potremo considerare il vertice V_r come libero e sollecitato dalle forze X_r, Y_r, Z_r parallele agli assi. Supponiamo ora che siasi ottenuta l'espressione del lavoro molecolare del sistema in funzione delle forze esterne, delle reazioni X_r, Y_r, Z_r, ecc. dei punti fissi, e delle tensioni di alcune verghe, nessuna delle quali però concorra nei punti fissi. Rappresentiamo con $F(X_r, Y_r, Z_r, \ldots, T_{pq}, \ldots)$ l'espressione del lavoro molecolare di tutto il sistema.

Io dico che i valori delle reazioni X_r, Y_r, Z_r, ... e delle tensioni incognite T_{pq} sono quelli, che rendono minima l'espressione del lavoro molecolare, tenendo conto delle equazioni di condizione tra le tensioni T_{pq}.

Difatti uguagliando a zero il differenziale del lavoro molecolare si ottiene:

$$\frac{dF}{dX_r} dX_r + \frac{dF}{dY_r} dY_r + \frac{dF}{dZ_r} dZ_r + \ldots + \Sigma \frac{dF}{dT_{pq}} dT_{pq} = 0 \;:$$

ora, poichè nessuna delle tensioni T_{pq} appartiene alle verghe concorrenti nei punti fissi, è chiaro che in nessuna delle equazioni di condizione entreranno le reazioni X_r, ecc. onde l'equazione precedente si scinde in queste altre:

$$\frac{dF}{dX_r} = 0 \;, \quad \frac{dF}{dY_r} = 0 \;, \quad \frac{dF}{dZ_r} = 0 \;. \quad \text{ecc.}$$

$$\Sigma \frac{dF}{dT_{pq}} dT_{pq} = 0 \;.$$

Combinando quest'ultima nel modo consueto colle equazioni di condizione, si ottengono evidentemente le stesse equazioni come se le forze X_r, Y_r, Z_r, ... fossero note; cioè si possono determinare tutte le tensioni incognite T_{pq} in funzione delle reazioni incognite dei punti fissi. A queste equazioni bisognerebbe poi aggiungere quelle, le quali esprimono che gli spostamenti dei vertici fissi sono nulli: ora, secondo il teorema enunciato nel num. 10, le funzioni $\frac{dF}{dX_r}$, $\frac{dF}{dY_r}$, $\frac{dF}{dZ_r}$, ecc. esprimono gli spostamenti del vertice V_r parallelamente agli assi; dunque uguagliandole a zero si viene appunto ad esprimere che il vertice V_r è fisso.

Si può giungere in modo più diretto a questo risultato immaginando che ciascun vertice fisso sia trattenuto da tre verghe perfettamente rigide e parallele agli assi: difatti se si immagina una superficie S, la quale tagli tutte queste verghe rigide e tale che comprenda entro sè tutta la parte di sistema di cui si sa esprimere il lavoro in funzione delle forze esterne e delle tensioni delle altre verghe (comprese quelle rigide), e se si rappresenta, come poco fa, con

$$F(X_r, Y_r, Z_r, \ldots, T_{pq}, \ldots)$$

il lavoro molecolare di tutto il sistema, è chiaro che i valori delle tensioni incognite (comprese quelle delle verghe rigide aggiunte) si otterranno rendendo minima la funzione F, tenuto conto delle equazioni di condizione. Ora, poichè nei vertici V_r non si hanno equazioni di condizione secondo quello, che è stato dimostrato nel num. 7, vedesi che si avranno dapprima le equazioni

$$\frac{dF}{dX_r} = 0, \quad \frac{dF}{dY_r} = 0, \quad \frac{dF}{dZ_r} = 0, \quad \text{ecc.}$$

e poscia l'equazione

$$\Sigma \frac{dF}{dT_{pq}} dT_{pq} = 0 \ ,$$

la quale dovrà combinarsi colle equazioni di condizione.

È da notare che le tre verghe ortogonali sostituite a ciascun vertice fisso si sono supposte rigide, perchè così il loro lavoro molecolare è nullo, e perciò il lavoro molecolare del sistema non resta alterato. Si sarebbe tuttavia ottenuto lo stesso risultato supponendo sostituite a ciascun vertice fisso tre verghe elastiche ortogonali e facendo poscia diminuire indefinitamente la loro elasticità.

10. ***Utilità del teorema del minimo lavoro.*** — In pratica non avviene quasi mai che si adoperino dei sistemi elastici semplicemente articolati, cioè dei sistemi composti soltanto di verghe elastiche congiunte a snodo: invece sono continuamente adoperati dei sistemi che chiamerò *misti*, composti di travi rinforzate da saette o tiranti, cioè da verghe elastiche congiunte a snodo colle travi in diversi punti della loro lunghezza, e fra loro.

Affinchè dunque un teorema intorno ai sistemi elastici abbia un'utilità pratica, bisogna che esso sia applicabile ai sistemi *misti*. Questo pregio ha appunto il teorema del minimo lavoro, ed è solo per ciò, che io mi sono adoperato, quanto ho potuto, a dimostrarne l'esattezza e l'utilità.

Siccome però le sue proprietà riguardo ai sistemi semplicemente articolati si mantengono anche per quelli misti, come dimostrerò fra poco, dirò fin d'ora alcuni vantaggi che esso presenta su altri metodi nel calcolo dei sistemi articolati.

Dapprima è chiaro che esso permette di determinare le tensioni di tutte le verghe del sistema con qualunque dei metodi, che servono a trovare il minimo di una funzione di più variabili, essendo date fra queste variabili alcune equazioni di condizione.

Inoltre dalle cose dimostrate nel num. 7 risulta che, se in un modo qualunque si è ottenuta l'espressione del lavoro molecolare di un sistema articolato in funzione delle tensioni di alcune soltanto delle verghe, che lo compongono, si otterranno i valori di queste tensioni esprimendo che il lavoro molecolare del sistema è un minimo, tenuto conto delle equazioni di condizione tra le incognite.

Infine, se si ha il lavoro molecolare di un sistema articolato espresso per mezzo delle tensioni di alcune verghe, e se queste tensioni si possono esprimere in funzione di altre quantità m_1, m_2, ... è chiaro che anche il lavoro molecolare del sistema si potrà esprimere in funzione di m_1, m_2, ... e le equazioni di condizione tra le tensioni incognite si potranno convertire in altre tra le quantità m_1, m_2, ecc.; or bene, i valori di m_1, m_2, ... si otterranno colla condizione che il lavoro molecolare del sistema espresso per mezzo di esse sia un minimo, tenuto conto delle equazioni di condizione, che le vincolano. Quest'ultima osservazione è di molta importanza.

11. ***Osservazioni intorno al teorema del minimo lavoro.*** — Vi sono alcuni casi pei quali potrebbe dubitarsi che non fosse applicabile il teorema del minimo lavoro: io ne sceglierò uno, e il ragionamento, che farò su di esso, potrà servire di norma anche per gli altri.

Sia un corpo perfettamente rigido, al quale siano applicate delle verghe elastiche, che formino un sistema qualunque, ma tale che prescindendo dalle piccole deformazioni provenienti dall'elasticità delle aste, esso abbia forma invariabile.

È chiaro che non cambierebbero punto le condizioni del sistema, se al corpo rigido si sostituissero delle verghe rigide congiungenti fra loro in tutti i modi possibili i punti del corpo rigido, ove fanno capo le verghe elastiche. Immaginiamo ora una superficie S, la quale chiuda dentro sè tutte le verghe rigide, e tagli le verghe elastiche congiunte con quelle.

Consideriamo poscia un altro sistema, il quale non differisca da quello ora considerato, se non per ciò che alle verghe rigide siano sostituite delle verghe elastiche, e supponiamo, che la somma dei lavori molecolari di queste verghe, le quali son contenute entro la superficie S siasi espressa in funzione delle tensioni delle verghe tagliate dalla superficie stessa e delle forze esterne, e quindi abbiasi il lavoro molecolare di tutto il sistema in funzione delle tensioni delle verghe esterne alla superficie S, o tagliate da essa. Risulta dal num. 7 che i valori di queste tensioni son quelli, che rendono minima l'espressione del lavoro molecolare del sistema, tenuto conto delle equazioni di condizione tra le tensioni medesime. Questa proposizione è vera, qualunque sia il grado d'elasticità delle verghe contenute entro la superficie S, purchè le deformazioni del sistema siano sempre piccolissime: dunque essa è vera anche quando queste verghe sono rigide, nel qual caso il loro lavoro molecolare è nullo, e perciò il lavoro molecolare di tutto il sistema si riduce al solo lavoro molecolare delle verghe elastiche.

Avvertendo poi che nelle equazioni di condizione non potevano entrare le tensioni delle verghe contenute entro la superficie S, possiamo conchiudere che nel caso di un corpo rigido trattenuto da verghe elastiche, si otterranno le tensioni di queste verghe esprimendo che la somma dei loro lavori molecolari è un minimo, tenuto conto delle equazioni di condizione tra le tensioni incognite.

In questo caso, che io ho considerato, è evidentemente compreso quello d'una tavola piana e rigida appoggiata sopra un numero qualunque di sostegni elastici.

12. *Considerazioni intorno ai sistemi perfettamente rigidi.* — Immaginiamo un sistema articolato formato di aste perfettamente rigide: è chiaro che esso potrà riguardarsi come il limite di un altro formato di verghe elastiche, per le quali il grado di elasticità diminuisca indefinitamente, ossia il coefficiente di elasticità E cresca indefinitamente. Supponiamo dunque dapprima elastico il sistema, di cui sia n il numero dei vertici, e determiniamo le tensioni di tutte le verghe.

Abbiamo veduto nel num. 2 che si hanno le $3n-6$ equazioni (6) fra le tensioni incognite, e che queste si possono esprimere in funzione dei $3n-6$ spostamenti dei vertici per mezzo della formola (5), cosicchè prendendo per incognite questi spostamenti, si avranno appunto tante equazioni di primo grado quante incognite. Le quali dunque si potranno tutte esprimere nello stesso modo, cioè col rapporto di due determinanti, dei quali il denominatore sarà lo stesso per tutte e dell'ordine $3n-6$, e perciò, sarà funzione omogenea del grado $3n-6$ rispetto ai coefficienti ε_{pq}. I numeratori poi si deducono dal determinante del denominatore, sostituendo agli elementi di una colonna i termini costanti delle equazioni (6), ossia le componenti X_1, X_2, Y_2, ... X_p, Y_p, Z_p, ... delle forze esterne: quindi essi sono ancora determinanti dell'ordine $3n-6$, ma rispetto ai coefficienti ε_{pq} sono funzioni omogenee del grado $3n-7$.

Dunque se le trovate espressioni degli spostamenti dei vertici si sostituiscono nell'equazione (5) per ottenere le tensioni delle verghe, vedesi che ciascuna di queste tensioni sarà espressa dal rapporto di due funzioni omogenee del grado $3n-6$ rispetto ai coefficienti ε_{pq}, e perciò dipenderà soltanto dai rapporti tra questi coefficienti, e non punto dai loro valori assoluti.

Variando questi rapporti, variano i valori delle tensioni: ora se si suppone che i coefficienti di elasticità di tutte le verghe vadano crescendo indefinitamente, il sistema si avvicina sempre più ad essere rigido, ma intanto i rapporti fra i coefficienti di elasticità restano pienamente arbitrari, e perciò i valori delle tensioni non tendono verso alcun limite finito, ma restano indeterminati.

Dunque in un sistema perfettamente rigido è impossibile determinare le tensioni delle verghe, salvo che il loro numero sia soltanto $3n-6$, e la loro disposizione sia tale che renda il sistema di forma invariabile, nel qual caso bastano le equazioni (6) indipendentemente dalla formola (5).

Vène e Cournot, come ho detto nell'introduzione, credevano di avere scoperto un principio atto a determinare le pressioni e le tensioni nei sistemi perfettamente rigidi, e l'illustre Prof. Mossotti trovando confuse le idee di quei due autori, credeva difficile giudicare se potesse esistere tale principio. Vène e Cournot erano partiti dall'idea che, dato un sistema di forma qualunque, perfettamente rigido, le tensioni e le pressioni delle diverse parti di esso hanno necessariamente valori determinati, i quali devono potersi trovare; e si confermavano in tale opinione, riguardando i sistemi rigidi come limiti di sistemi elastici.

Ora, in natura non esiste, almeno alla superficie della terra, alcun sistema perfettamente rigido; ma posto pure che potesse esistere, deriva dalla dimostrazione precedente, che sarebbe impossibile determinare le tensioni delle sue parti, benchè sia evidente che in ciascun caso particolare queste tensioni dovrebbero avere valori perfettamente determinati.

13. ***Sistemi non semplicemente articolati.*** — Fin qui io non ho parlato che di sistemi articolati, cioè formati di verghe elastiche congiunte a snodo le une colle altre: essi hanno questo di particolare, che le verghe possono soltanto trovarsi soggette a tensione o compressione, cioè a forze dirette secondo i loro assi, perchè nella deformazione ciascuna verga può liberamente ruotare intorno alle sue estremità. Questi sistemi non sono mai adoperati nelle costruzioni, cosicchè le ricerche intorno ad essi possono bensì riuscire eleganti e ricche di dottrina, ma sono inutili alla pratica, se non sono tali che i loro risultati possano estendersi anche ai sistemi di cui si fa effettivamente uso.

Ora, io mi propongo di far vedere che il teorema del minimo lavoro è applicabile a tutti i sistemi.

È ammesso da tutti che i corpi sono composti di molecole di dimensioni piccolissime rispetto alle loro distanze, le quali sono esse medesime estremamente piccole; e che tali molecole, in un corpo in equilibrio, si mantengono a determinate distanze a cagione di attrazioni e ripulsioni, che esse esercitano l'una sull'altra: chiamando m, m' le masse di due molecole ed r la loro distanza, la loro attrazione reciproca può esprimersi con $mm'f(r)$ essendo $f(r)$ una funzione incognita della distanza r. Se al corpo si applicano delle forze esterne, esso si deforma e si dispone in una nuova condizione di equilibrio, nella quale la distanza delle due molecole m, m' riesce $r+\Delta r$, e perciò la loro attrazione reciproca

$$mm'f(r)+mm'f'(r)\Delta r$$

supponendo Δr piccolissima a fronte di r.

Dunque l'aumento dell'attrazione delle due molecole sarà

$$mm'f'(r)\Delta r,$$

cioè proporzionale all'incremento Δr della distanza, precisamente come avviene per l'aumento della tensione delle verghe.

Ne segue che un corpo qualunque si può riguardare come un sistema di verghe piccolissime congiunte a snodo, le quali sono forse soggette a certe pressioni o tensioni, anche mentre il sistema non è sollecitato da alcuna forza esterna.

È da notare non essere necessario che la funzione $f(r)$ abbia la stessa forma per tutte le coppie di molecole, ma bastare che per ciascuna coppia essa sia continua, almeno per variazioni di r piccolissime, a partire dal valore corrispondente all'equilibrio naturale del corpo. Quest'osservazione era necessaria, perchè poco si sa finora intorno alla costituzione molecolare dei corpi, come può vedersi nei migliori trattati (*).

Conchiudiamo, che ad un corpo o ad un sistema di corpi, il quale per l'azione di forze esterne subisca deformazioni piccolissime, cosicchè l'allontanamento di due molecole qualunque sia piccolissimo rispetto alla loro

(*) Lamé. — *Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.* — Vingt-quatrième leçon, N° 134.

Vedansi pure le note e le appendici IV e V del signor de Saint-Venant al *Trattato della resistenza dei solidi di Navier.*

distanza primitiva, è applicabile il teorema del minimo lavoro. Quindi se lo stato del sistema dopo la deformazione si può far dipendere da un piccolo numero di quantità, legate fra loro da alcune equazioni di condizione, e se il lavoro molecolare del sistema nella deformazione si esprime per mezzo di quelle sole quantità, si otterranno i valori delle medesime considerandole come variabili legate dalle equazioni di condizione, e cercando il sistema dei loro valori, che rende minima l'espressione del lavoro molecolare.

Supponiamo p. es. un corpo elastico sollecitato da forze comunque applicate, al quale siano unite a snodo in più punti delle verghe elastiche congiunte pure a snodo fra loro, o con altre verghe elastiche. La teoria matematica dell'elasticità dei corpi solidi ci insegna a trovare le condizioni d'equilibrio del corpo sotto l'azione delle forze, che vi sono applicate, comprese le tensioni delle verghe congiunte direttamente ad esso, onde, per mezzo della formola di Clapeyron, si potrà ottenere il lavoro molecolare fatto nella deformazione del corpo in funzione delle forze esterne e delle tensioni di alcune verghe, e perciò il lavoro molecolare di tutto il sistema in funzione delle tensioni di tutte le verghe.

Immaginando una superficie S, che circondi il corpo dato, e tagli quelle verghe, che vi sono direttamente applicate, vedesi il caso ora considerato essere precisamente quello studiato nel numero 7, e perciò doversi trovare le tensioni incognite delle verghe del sistema, esprimendo che il lavoro molecolare di esso è un minimo, tenuto conto delle equazioni di equilibrio in tutti i vertici, ove concorrono soltanto le verghe elastiche.

11. *Avvertenza.* — La dimostrazione del numero 7 l'ho data appunto per poter passare con ragionamento rigoroso alla conseguenza, che ora ne ho tratto.

Forse parrà ad alcuni che il teorema del numero 7 avrei potuto dimostrarlo in poche parole così: il lavoro molecolare di tutto il sistema articolato espresso in funzione delle tensioni delle verghe tagliate dalla superficie S o esterne ad essa, è ciò che si sarebbe ottenuto dal lavoro molecolare del sistema espresso in funzione di tutte quante le tensioni, eliminandovi le tensioni delle verghe interne alla superficie S; quindi si troveranno i valori delle tensioni, che quest'espressione contiene ancora, cercando il minimo di essa, tenuto conto delle equazioni di equilibrio nei vertici esterni alla superficie S.

Questo ragionamento sarebbe buono, se le equazioni di equilibrio nei vertici interni alla superficie S bastassero ad esprimere le tensioni delle verghe interne a questa superficie in funzione delle tensioni di quelle, che ne sono tagliate; ma siccome in generale non bastano, l'eliminazione testè detta non può farsi.

Ad alcuni parrà ancora che il teorema del num. 7 si possa per intuizione dedurre da quello del num. 3: io credo però non bastare nelle matematiche che una cosa si presenti alla mente coll'apparenza della verità, ma essere necessario che essa sia rigorosamente dimostrata, e questo tanto più quando trattasi di teoremi, che, ove siano dimostrati esatti, possono diventare di un uso continuo nella pratica; perciò ho preferito essere lungo e preciso, piuttosto che breve e confuso.

13. *Applicazioni.* — Nella mia dissertazione di laurea stampata nel novembre 1873, io ho procurato di dimostrare l'utilità del teorema del minimo lavoro, facendo vedere quanto semplicemente derivino da esso le condizioni dell'equilibrio d'elasticità per quei sistemi di uso più frequente nella pratica, e che fino allora erano stati fra tutti meno imperfettamente studiati. Io ho fatto vedere in quella dissertazione che coll'applicazione del teorema del minimo lavoro si ottengono facilmente sia l'equazione del signor CLAPEYRON relativa alle travi sostenute in più punti, sia le formole note pel calcolo delle incavallature POLONCEAU, delle incavallature inglesi e delle travi armate; ho detto entro quali limiti sono esatte queste formole, e quali termini bisognerebbe aggiungervi per renderle rigorose.

Io non ripeterò qui tali cose, ma invece darò un esempio del modo di applicare il teorema del minimo lavoro allo studio della stabilità delle centine di forma qualunque: e questo studio potrà forse non riuscire inutile, perchè finora l'abbiam sempre veduto fare partendo da ipotesi arbitrarie, talvolta pochissimo conformi alla realtà dei fatti, e dalle quali perciò non si può sperare nè progresso per la scienza, nè risultati degni di fiducia.

Io so bene che molti credono bastare nella pratica il sano criterio del costruttore, aiutato tutto al più da qualche formola empirica; e tuttavia credo che per molte opere, come p. es. le centine delle grandi tettoie, per nessuna delle quali si può generalmente prender norma in tutto da altre costruzioni analoghe, sia indispensabile determinare con un calcolo esatto gli sforzi, ai quali si troveranno sottoposte le diverse parti, per poter assegnare a ciascuna quelle dimensioni, che assicurino all'opera una durata indefinita.

16. ***Centine della tettoia di Bra.*** — Queste centine sono formate di un arco di legno, a cui si collegano cinque tiranti e due saette, come è rappresentato nella figura.

Suppongo la centina caricata uniformemente sulla proiezione orizzontale sia riguardo al peso permanente che al sovraccarico; e poichè la tettoia è coperta di zinco, prendo 70 Kgr. pel pèso distribuito sopra ogni mq. della proiezione orizzontale, comprendendovi il peso proprio delle centine, il peso della neve e la pressione del vento: quindi detta D la distanza di due centine, sarà

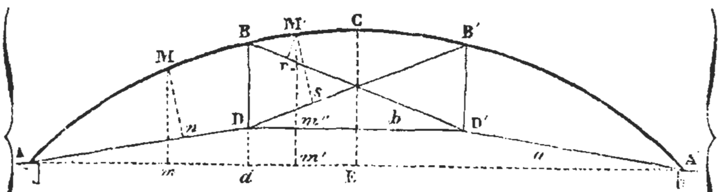
$$p = 70 D$$

il peso in Kgr. distribuito sopra un ml. di proiezione orizzontale della centina.

Suppongo ancora la centina appoggiata per le sue estremità sopra un piano orizzontale senza attrito, cosicchè ciascun appoggio sopporterà solamente una pressione verticale uguale a Kgr. $6,15 \times 70 D = 430,5 D$, che chiamo Q.

Volendo riconoscere se la centina sia in buone condizioni di stabilità, dobbiamo dapprima determinare le tensioni incognite dei tiranti e delle saette; perciò dobbiamo esprimere il lavoro molecolare di tutto il sistema in funzione di queste tensioni incognite, e poi cercare i valori di esse, che rendono minima quell'espressione, tenuto conto delle equazioni di equilibrio nei vertici D e D', o meglio soltanto nel vertice D, poichè per la simmetria del sistema basta considerare solo la metà di esso.

Chiamo ordinatamente t, t_1, t_2, t_3 le tensioni delle aste



$AA' = 12^m,30$; $CE = 2,10$; $Dd = 0,60$; $AD = 4,20$

$BD' = DB' = 4,19$; $BD = 1,25$; $DD' = 4,00$

DD', AD, DB', DB, le quali sono uguali alle tensioni delle loro simmetriche; l, l_1, l_2, l_3 le lunghezze di tali aste, ω, ω_1, ω_2, ω_3 le aree delle loro sezioni, e il coefficiente di elasticità delle tre aste DD', AD, DB', che son di ferro, ed e_1 quello della saetta di ghisa DB; α e β gli angoli DAE, $B'DD'$.

Considerando, come abbiam detto, soltanto la metà del sistema, il lavoro molecolare delle quattro verghe è espresso da

$$\frac{1}{2e}\left(\frac{t^2}{\omega}\frac{l}{2}+\frac{t_1^2}{\omega_1}l_1+\frac{t_2^2}{\omega_2}l_2\right)+\frac{1}{2e_1}\frac{t_3^2}{\omega_3}l_3 \quad \ldots\ldots \quad (18)\ .$$

A questo dobbiamo aggiungere il lavoro molecolare fatto nella deformazione dell'arco AMC: ora, chiamando μ il momento inflettente rispetto al punto M, N la somma delle componenti, parallele alla tangente in M, di tutte le forze applicate all'arco alla sinistra di questo punto, compresa la reazione dell'appoggio, T la somma delle componenti perpendicolari alla detta tangente (avvertendo che tutte le forze sono contenute in un piano verticale), s, S le lunghezze degli archi AB, AC, e $d\sigma$ l'elemento infinitesimo dell'arco AC, il lavoro molecolare fatto nella deformazione di quest'arco è espresso dalla formola:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2EI}\left[\int_0^s \mu^2 d\sigma+\int_s^S \mu^2 d\sigma\right]\\&+\frac{1}{2E\Omega}\left[\int_0^s N^2 d\sigma+\int_s^S N^2 d\sigma\right]\\&+\frac{f}{2E_1\Omega}\left[\int_0^s T^2 d\sigma+\int_s^S T^2 d\sigma\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)\ ;$$

ove Ω ed I indicano l'area della sezione dell'arco e il suo momento d'inerzia rispetto alla orizzontale passante pel centro di gravità, E ed E_1 sono i coefficienti dell'elasticità longitudinale e trasversale della sostanza dell'arco (*).

Ora, abbassando dal punto M le perpendicolari Mm, Nn sulle AE, AD e dal punto M' le perpendicolari $M'm'$, $M'r$, $M's$ sulle AE, B_1D' DB' e chiamando φ, φ' gli angoli delle tangenti in M, M' coll'orizzonte, si ha, pel punto M

$$\mu = \left(Q - \frac{1}{2} p \cdot \overline{Am}\right) \overline{Am} - t_1 \cdot \overline{Mn} \; ,$$

$$N = (Q - p \cdot \overline{Am}) \operatorname{sen} \varphi + t_1 \cdot \cos(\varphi - \alpha) \; ,$$

$$T = (Q - p \cdot \overline{Am}) \cos \varphi - t_1 \cdot \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \; ,$$

(*) In questa formola il terzo termine esprime il lavoro proveniente dallo scorrimento trasversale, ma la sua forma non è rigorosa, ed il coefficiente f è messo appunto per assegnarvi in ogni caso particolare un valore conveniente onde ottenere risultati esatti. Questo coefficiente dipende, sia dalla forma della sezione del solido, sia dalla legge della distribuzione delle forze; ma finora non si sa trovarne esattamente il valore, tranne in alcuni casi semplicissimi e tuttavia importantissimi, che per la prima volta sono stati risoluti dal signor de SAINT-VENANT.

Perciò i Professori BRESSE e CURIONI partono dall'ipotesi che le sezioni dei solidi si mantengano piane nella deformazione ed ottengono $f=1$: ma dai lavori del signor de SAINT-VENANT risulta che in questo modo si può commettere nel calcolo dello scorrimento trasversale un errore dello stesso ordine di grandezza della quantità, che si vuol calcolare, e che invece si può già ottenere molto maggiore approssimazione tenendo conto dell'inflettersi delle sezioni, ma ammettendo che l'inflessione avvenga secondo superficie cilindriche. Partendo da queste idee, io ho ottenuto, per esprimere il lavoro molecolare dovuto allo scorrimento trasversale, il terzo termine della formola (19), ove il coefficiente f devesi perciò riguardare come funzione soltanto della forma della sezione. Per l'arco che consideriamo essendo rettangolare la sezione, con un lato orizzontale, ho trovato

$$f = \frac{6}{5} \, .$$

Di queste ricerche e di altre analoghe tratterò un'altra volta.

e pel punto M'

$$\mu=\left(Q-\frac{1}{2}p\cdot\overline{Am'}\right)\overline{Am'}-t\cdot\overline{M'm''}-t_2\cdot(\overline{M'r}+\overline{M's}) \; ,$$

$$N=(Q-p\cdot\overline{Am'})\operatorname{sen}\varphi'+(t+2t_2\cos\beta)\cos\varphi' \; ,$$

$$T=(Q-p\cdot\overline{Am'})\cos\varphi'-(t+2t_2\cos\beta)\operatorname{sen}\varphi' \; .$$

Da queste ultime tre espressioni si può eliminare t_2 e dalla formola (18) si possono eliminare le tensioni t_2, t_3, poichè le tensioni delle quattro verghe concorrenti nel punti D dovendo farsi equilibrio, si hanno le due equazioni:

$$t+t_2\cos\beta-t_1\cos\alpha=0 \; ,$$

$$t_1\operatorname{sen}\alpha-t_3-t_2\operatorname{sen}\beta=0 \; ,$$

ossia, sostituendo agli angoli α, β i loro valori,

$$t_2=1,035\,t_1-1,05\,t \; ,$$

$$t_3=0,313\,t-0,153\,t_1 \; .$$

Sostituendo alle lettere i numeri nelle formole testè ottenute ed eseguendo le integrazioni, si ottiene:

$$\int_0^s\mu^2\,d\sigma=2650000\,D^2+3,44\,t_1^2-6070\,D\,t_1 \; ,$$

$$\int_s^S\mu^2\,d\sigma=3240000\,D^2+1,56\,t_1^2+0,052\,t^2-7700\,Dt_1+755\,Dt-0,92\,t\,t_1 \; ,$$

$$\int_0^s N^2\,d\sigma=102000\,D^2+4,20\,t_1^2+1120\,D\,t_1 \; ,$$

$$\int_s^S N^2\,d\sigma=370\,D^2+6,90\,t_1^2+1,68\,t^2+59\,Dt_1-20,3\,Dt-6,62\,t\,t_1 \; ,$$

$$\int_0^s T^2\,d\sigma=330000\,D^2-710\,D\,t_1+0,408\,t_1^2 \; ,$$

$$\int_s^S T^2\,d\sigma=13800\,D^2+0,062\,t_1^2+0,0142\,t^2-46,50\,Dt_1+21,0\,Dt-0,058\,t\,t_1 \, .$$

Dobbiamo ora sostituire queste espressioni nella formola (19), poi sommare questa formola colla (18) ed uguagliare a zero le derivate della somma prese rispetto a t, t_1. Osserviamo però che la sezione dell'arco essendo un rettangolo col lato orizzontale di $0^m,12$ e l'altro di $0^m,20$, si ha

$$\Omega = 0,024\,, \qquad I = 0,00008\,,$$

onde, supponendo l'arco di larice e prendendo perciò

$$E = 1\,500\,000\,000\,, \quad E_t = 500\,000\,000$$

si ottiene

$$E\,\Omega = 36\,000\,000\,, \qquad E_t\,\Omega = 12\,000\,000\,,$$

$$E\,I = 120\,000.$$

Vedesi adunque che le quantità $\frac{1}{\Omega E}$, $\frac{1}{E_t \Omega}$ sono uguali soltanto ad $\frac{1}{300}$ e ad $\frac{1}{100}$ di $\frac{1}{EI}$; onde segue che con un grado di approssimazione assai maggiore di quello, che occorre in pratica, si possono trascurare i due termini del lavoro molecolare dell'arco, i quali provengono dalla compressione e dallo scorrimento trasversale, a fronte di quello proveniente dalla flessione: perciò io li trascuro, ma vedesi che non havvi alcuna difficoltà a tenerne conto.

Riguardo alla formola (18) avverto che le verghe *AD*, *DB'*, *DD'* sono tutte tre di ferro ed hanno sezione circolare col diametro di $0^m,035$, mentre la saetta *BD* è di ghisa ed ha una sezione a croce colle due braccia della croce lunghe $0^m,08$ e coll'area di $0^{mq},00215$. Essendo dunque pel ferro e per la ghisa

$$e = 15\,000\,000\,000\,, \quad e_1 = 12\,000\,000\,000$$

si ha

$$e\omega = e\omega_1 = e\omega_2 = 14\,400\,000\,, \quad e_1\omega_3 = 25\,800\,000\,:$$

inoltre sostituendo alle lettere i numeri si ottiene

$$\frac{1}{2}t^2 l + t_1^2 l_1 + t_2^2 l_2 = 8,67\, t_1^2 + 6,60\, t^2 - 8,85\, t t_1 \ ,$$

$$t_3^2 l_3 = 0,0292\, t_1^2 + 0,122\, t^2 - 0,120\, t t_1 \ .$$

Sostituendo tutti questi risultati numerici nella formola (18) ed avvertendo che le quantità $\frac{1}{e\omega}$, $\frac{1}{e_1 \omega_1}$ sono assai minori di $\frac{1}{100}$ della quantità $\frac{1}{EI}$, vedesi che anche i termini provenienti dal lavoro molecolare delle verghe sono trascurabili a fronte di quello dovuto all'inflessione dell'arco.

Tenendo dunque conto soltanto di quest'ultimo termine ed uguagliandone a zero le derivate parziali prese rispetto a t, t_1, si ottengono le due equazioni

$$16\, t_1 - 0,92\, t = 13770\, D \ ,$$

$$0,92\, t_1 - 0,104\, t = 755\, D \ ,$$

dalle quali si trae

$$t_1 = 900\, D \ , \qquad t = 615\, D \ ,$$

e perciò

$$t_2 = 285\, D \ , \qquad t_3 = 50,5\, D \ .$$

Se la distanza delle centine è di 5 metri, si ha

$$t_1 = 4500 \ , \qquad t = 3075 \ ,$$

$$t_2 = 1425 \ , \qquad t_3 = 252,5 \ ,$$

e quindi supponendo, come ordinariamente si fa, che la resistenza del ferro agli sforzi di tensione sia di 6 Kgr. per mmq., trovasi pel diametro dell'asta AD mm. 30,7; per l'asta DD' mm. 25,6 e per l'asta DB' mm. 17,4.

La resistenza della ghisa agli sforzi di tensione può prendersi di Kgr. 1,5 per mmq.; quindi basterebbe che l'area della sezione della saetta AD fosse di mmq. $\frac{252,5}{1,5} = 168$.

I costruttori della tettoia di Bra hanno fatto di ghisa la saetta BD e le hanno dato una sezione a croce, credendo probabilmente che essa si sarebbe trovata premuta, mentre invece risulta dal calcolo precedente che essa è tesa. Ma esaminando bene le cose, non è difficile rendersi ragione del perchè questa saetta si trovi soggetta a tensione: difatti quanto più l'asta DD' si avvicina alla retta BB', cioè quanto più corte sono le due saette BD, $B'D'$, tanto più deve crescere la loro tensione, come risulta dalla disposizione delle aste concorrenti nel punto D: avvicinandosi invece l'asta DD' alla corda AA', la tensione della saetta BD diminuisce, e diventa zero quando la tensione della verga AD diventa uguale alla risultante delle tensioni delle due verghe $B'D$, DD': a partire da questo punto continuando l'asta DD' ad avvicinarsi alla corda AA' la tensione della saetta BD diventa negativa, cioè si cangia in pressione.

Determinate le tensioni di tutte le aste del sistema, non havvi più difficoltà alcuna a valutare la massima tensione e la massima pressione generate nell'arco e quindi il grado di stabilità del medesimo.

Io non fo questo calcolo, benchè assai breve, perchè nulla aggiungerebbe a quello, che io ho voluto dimostrare con un esempio, che è la grande utilità del teorema del minimo lavoro. Piuttosto aggiungerò che le semplificazioni, le quali abbiamo veduto aver luogo per la centina della tettoia di Bra, provenienti dalla piccolezza di alcuni termini rispetto ad altri, hanno luogo in quasi tutti i casi;

il che è utilissimo a sapersi, perchè giova ad abbreviare grandemente i calcoli, senza tuttavia cadere in errori, che possano avere nella pratica perniciosa influenza.

Torino 27 Dicembre 1874.

CASTIGLIANO ALBERTO.