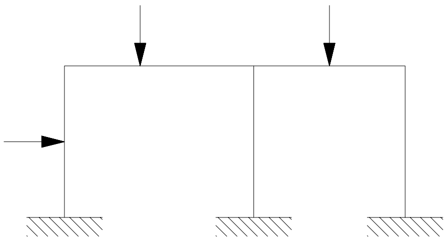
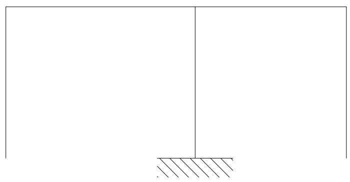
6. METODO DELLE FORZE – IMPOSTAZIONE GENERALE



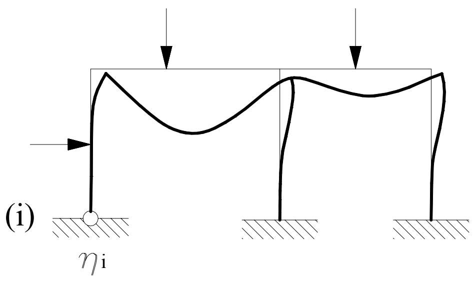
Associamo al sistema iperstatico un altro sistema, denominato sistema principale.

Il sistema principale è un sistema staticamente determinato, che si ottiene da quello dato sopprimendo vincoli (esterni od interni) nella misura necessaria e sufficiente.

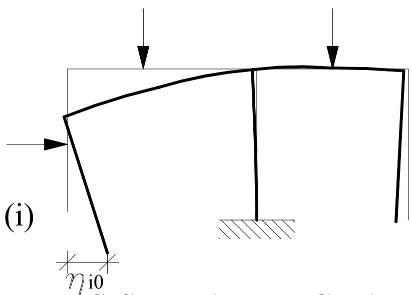
Esempio di sistema principale:



Applicando al sistema principale i carichi attivi, si rispetta l'equilibrio (il sistema è isostatico), ma non la congruenza. Infatti, nei punti dove sono stati soppressi vincoli, nella direzione e verso del generico i-esimo vincolo soppresso si ha uno spostamento η_{i0} che in generale è diverso dall'effettivo cedimento del vincolo η_i .



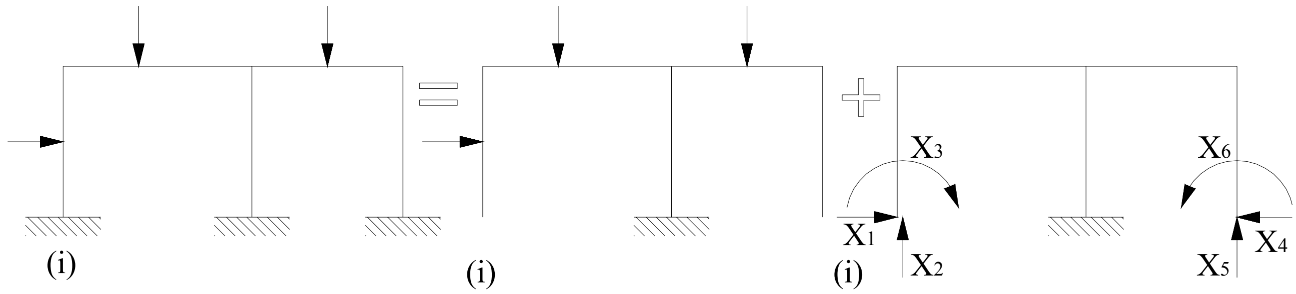
SISTEMA EFFETTIVO



SISTEMA PRINCIPALE

Si riottiene un sistema equivalente a quello effettivo applicando nel sistema principale, in corrispondenza di tutti gli n vincoli soppressi, le reazioni X_i $(i = 1,...n)$ che erano esercitate sul sistema effettivo da quei vincoli.

Tali reazioni sono denominate iperstatiche.



Le iperstatiche devono far recuperare la congruenza; quindi, esse devono produrre, in corrispondenza del generico i-esimo vincolo soppresso, uno spostamento che, sommato a η_{i0}, faccia ottenere il valore effettivo η_i.

A questo punto, grazie alla linearità del problema, possiamo dire:

1. lo spostamento dovuto al complesso delle iperstatiche è la somma degli spostamenti prodotti separatamente da ciascuna
2. lo spostamento prodotto da ciascuna iperstatica è il prodotto dello spostamento provocato dall'iperstatica posta =1, per l'iperstatica.

Traducendo in formula: $$\eta_i = \eta_{i0} + \sum_1^n {}_k \eta_{ik} \cdot X_k$$

dove η_{ik} è lo spostamento del punto di applicazione dell'iperstatica X_i, nella direzione e nel verso di X_i, prodotto da $X_k = 1$.

Quindi si è ottenuto : $$\boxed{\eta_i = \eta_{i0} + \sum_1^n {}_k \eta_{ik} \cdot X_k ; (k = 1,...,n)}$$

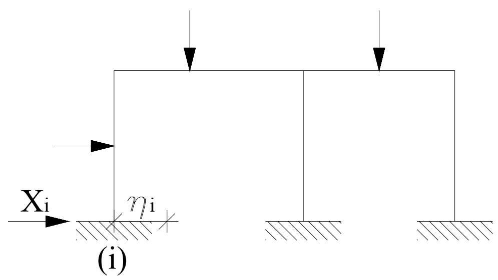
Queste equazioni sono denominate equazioni di Müller-Breslau. Sono equazioni di congruenza.

Sono in numero di n (tante quanti i vincoli soppressi e quindi quante le X_k).

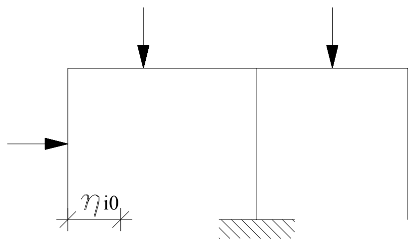
Consentono di determinare le X_k se sono valutabili a priori tutti gli altri termini.

A tal fine osserviamo che:

- η_i= spostamento del punto di applicazione di X_i, nella direzione e nel verso di X_i, nel sistema effettivo. E' il cedimento del vincolo i-esimo, che si suppone noto (se è zero, il vincolo è perfetto)



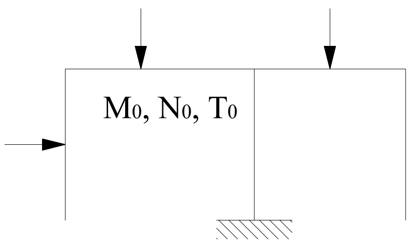
- η_{io} = spostamento del punto di applicazione di X_i, nella direzione e nel verso di X_i, nel sistema principale, provocato dai carichi.

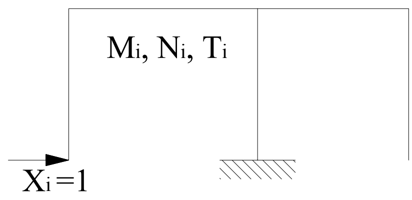


(i)

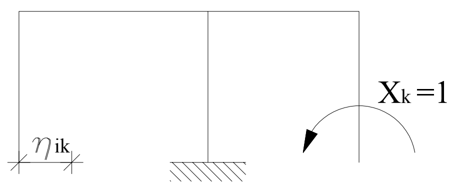
Si può determinare col teorema dei lavori virtuali (forze virtuali).

$$\eta_{io} = \int_s \left(\frac{M_i \cdot M_0}{EJ} + \frac{N_i \cdot N_0}{EA} + \frac{T_i \cdot T_0}{GK} \right) ds$$





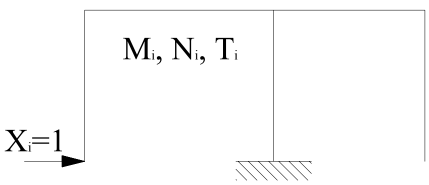
- η_{ik} = spostamento del punto di applicazione di X_i, nella direzione e nel verso di X_i, nel sistema principale, provocato da $X_k = 1$

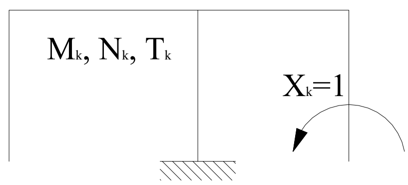


(i)

Si può determinare col teorema dei lavori virtuali (forze virtuali).

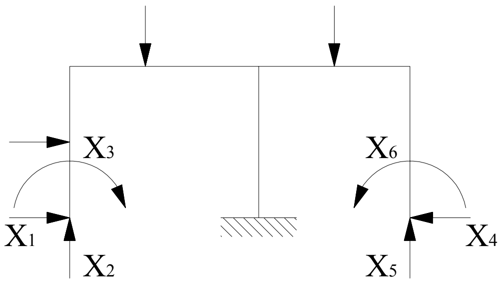
$$\eta_{ik} = \int_s \left(\frac{M_i \cdot M_k}{EJ} + \frac{N_i \cdot N_k}{EA} + \frac{T_i \cdot T_k}{GK} \right) ds$$



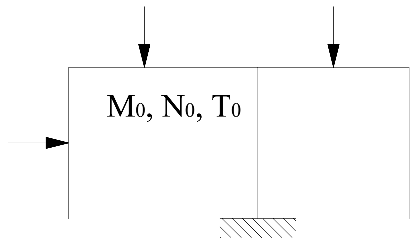


Operativamente:

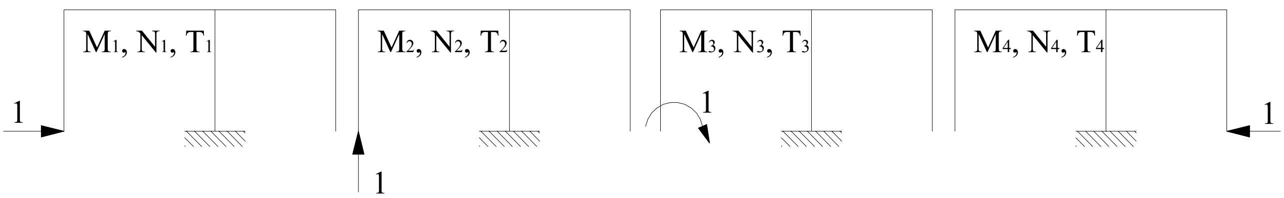
1)Scelta di un sistema principale ($\eta_1,...,\eta_n$ sono noti)



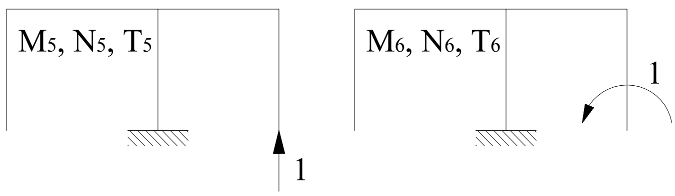
2) Calcolo di M_0, N_0, T_0



3) Calcolo di $M_1...M_n, N_1...N_n, T_1...T_n$ (nel nostro caso, $n = 6$)



4) Calcolo di:



$$\eta_{io} = \int_s \left(\frac{M_i \cdot M_0}{EJ} + \frac{N_i \cdot N_0}{EA} + \frac{T_i \cdot T_0}{GK} \right) ds$$

$$\eta_{ik} = \int_s \left(\frac{M_i \cdot M_k}{EJ} + \frac{N_i \cdot N_k}{EA} + \frac{T_i \cdot T_k}{GK} \right) ds$$

5) Risoluzione del sistema: $\sum_1^n {}_k\eta_{ik} \cdot X_k = \eta_i - \eta_{i0}$

Osservazioni:

1) Poiché la deformazione dovuta al taglio è molto minore delle altre, negli integrali

$$\eta_{io} = \int_s \left(\frac{M_i \cdot M_0}{EJ} + \frac{N_i \cdot N_0}{EA} + \cancel{\frac{T_i \cdot T_0}{GK}} \right) ds \; ; \quad \eta_{ik} = \int_s \left(\frac{M_i \cdot M_k}{EJ} + \frac{N_i \cdot N_k}{EA} + \cancel{\frac{T_i \cdot T_k}{GK}} \right) ds$$

i termini $\frac{T_i \cdot T_0}{GK}, \frac{T_i \cdot T_k}{GK}$ sono in generale trascurabili rispetto agli altri (si assume $GK = \infty$, come già fatto in precedenza)

2) Il termine $\eta_{ii} = \int_s \left(\frac{M_i^{\,2}}{EJ} + \frac{N_i^{\,2}}{EA} + \cancel{\frac{T_i^{\,2}}{GK}} \right) ds$ è >0

3) Si ha evidentemente $\eta_{ik} = \eta_{ki}$ (già visto in precedenza, teorema di Maxwell)

Quindi la matrice dei coefficienti del sistema delle equazioni di Müller-Breslau:

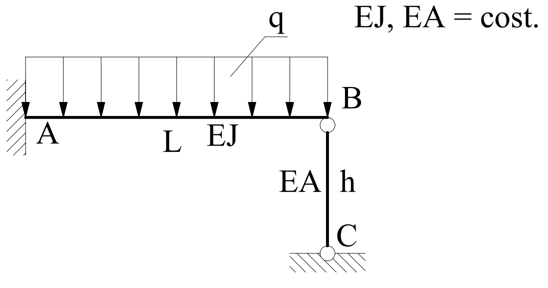
$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \mu_{12}......\eta_{1n} \\ \eta_{21} & \mu_{22}......\eta_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{........................} \\ \eta_{n1} & \mu_{n2}......\eta_{nn} \end{bmatrix}$$

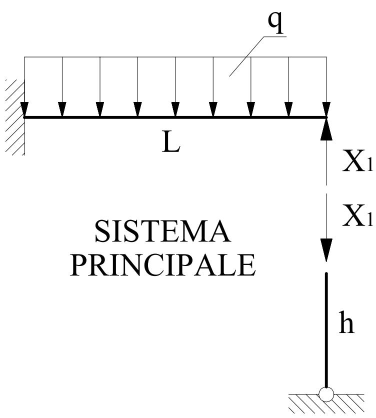
è simmetrica ($\eta_{ik} = \eta_{ki}$) ed ha i termini della diagonale principale positivi (η_{ii} >0).

4) Se un'iperstatica risulta di valore negativo, ciò significa che il suo verso effettivo è opposto rispetto a quello che le era stato attribuito.

METODO DELLE FORZE – IMPOSTAZIONE GENERALE – ESEMPI

Esempio 1





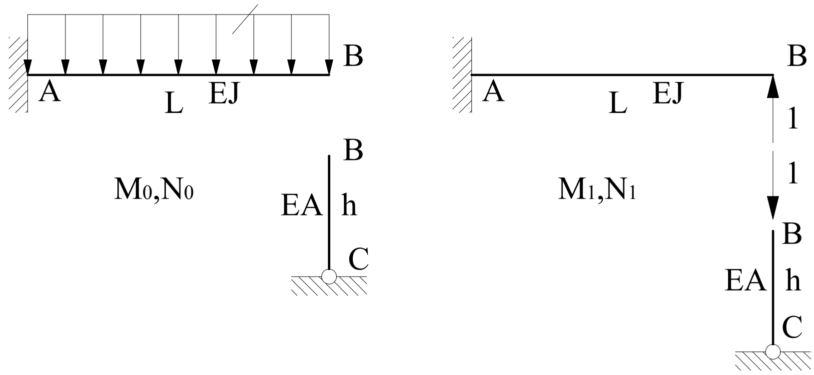
$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} \cdot X_1$

$\eta_1 = 0$ (si è operata una sconnessione interna: η_1 rappresenta quindi uno spostamento mutuo)

$$\eta_{10} = \int_s \left(\frac{M_1 \cdot M_0}{EJ} + \frac{N_1 \cdot N_0}{EA} \right) ds$$

$$\eta_{11} = \int_s \left(\frac{{M_1}^2}{EJ} + \frac{{N_1}^2}{EA} \right) ds$$

valutazione di $M_0, N_0; M_1, N_1$



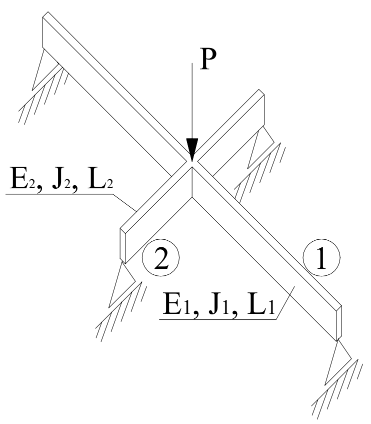
	M_0	N_0	M_1	N_1	$M_1 \cdot M_0$	$N_1 \cdot N_0$	M_1^2	${N_1}^2$
A-B	$-\frac{q}{2} \cdot (L-z)^2$	0	$L - z$	0	$-\frac{q}{2} \cdot (L-z)^3$	0	$(L-z)^2$	0
B-C	0	0	0	-1	0	0	0	1

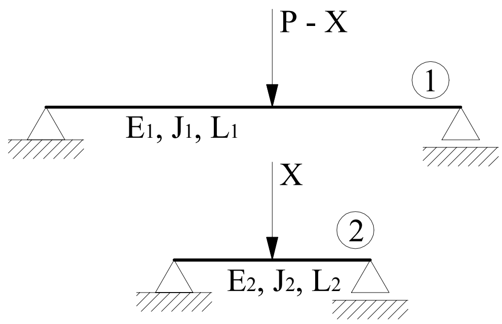
$$\eta_{10} = \int_0^L -\frac{q}{2EJ} \cdot \left(L - z^3 \right) dz = -\frac{qL^4}{8EJ}$$

$$\eta_{11} = \int_0^L \frac{1}{EJ} \cdot (L-z)^2 \, dz + \int_0^h \frac{1}{EA} dz = \frac{L^3}{3EJ} + \frac{h}{EA}$$

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{\frac{qL^4}{8EJ}}{\frac{L^3}{3EJ} + \frac{h}{EA}} = \frac{qL^4}{8 \cdot \left(\frac{L^3}{3} + \frac{J}{A} \cdot h \right)}$$

Esempio 2

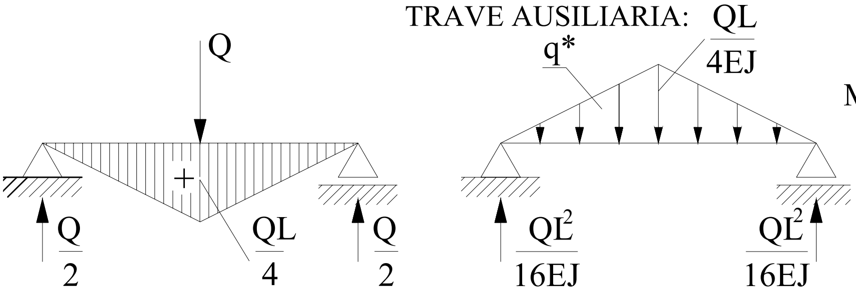




X = parte di P assorbita da 2
(P-X) = parte di P assorbita da 1

N.B. La freccia di una trave appoggiata con carico Q in mezzeria vale $\dfrac{QL^3}{48EJ}$

<u>Dimostrazione per esempio con le analogie di Mohr</u>



$$M^*\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{QL^2}{16EJ}\cdot\frac{L}{2}-\frac{QL}{4EJ}\cdot\frac{L}{4}\cdot\frac{L}{6}=$$
$$=\frac{QL^3}{32EJ}-\frac{QL^3}{96EJ}=\frac{QL^3}{48EJ}\quad(\downarrow)$$

Equazione di congruenza: $\dfrac{(P-X)L_1^3}{48E_1J_1}=\dfrac{XL_2^3}{48E_2J_2}$

$$\frac{PL_1^3}{48E_1J_1}=\frac{XL_1^3}{48E_1J_1}+\frac{XL_2^3}{48E_1J_1}$$

trave (2) $X=P\cdot\dfrac{\dfrac{L_1^3}{E_1J_1}}{\dfrac{L_1^3}{E_1J_1}+\dfrac{L_2^3}{E_2J_2}}$

trave (1) $P-X=P\cdot\dfrac{\dfrac{L_2^3}{E_2J_2}}{\dfrac{L_1^3}{E_1J_1}+\dfrac{L_2^3}{E_2J_2}}$

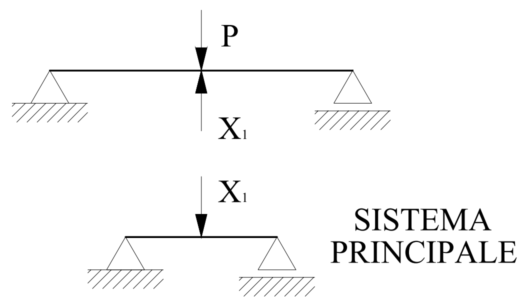
Rapporto fra le parti di P assorbite dalla trave (1) e dalla trave (2)

$$\frac{P-X}{X}=\frac{\dfrac{L_2^3}{E_2J_2}}{\dfrac{L_1^3}{E_1J_1}}=\frac{\dfrac{E_1J_1}{L_1^3}}{\dfrac{E_2J_2}{L_2^3}}\qquad \text{se } E_1J_1=E_2J_2\rightarrow\frac{P-X}{X}=\frac{L_2^3}{L_1^3}$$

<u>Osservazione</u>: la struttura più rigida assorbe la frazione maggiore del carico P

N.B. Inquadramento con le equazioni di Müller-Breslau:

$\eta_1=\eta_{10}+\eta_{11}\cdot X_1$; $\quad\eta_1=0$ (sconnessione interna)

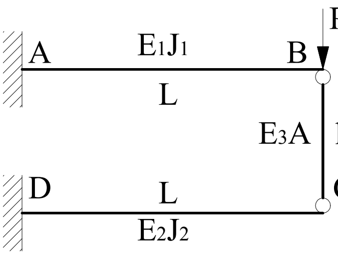


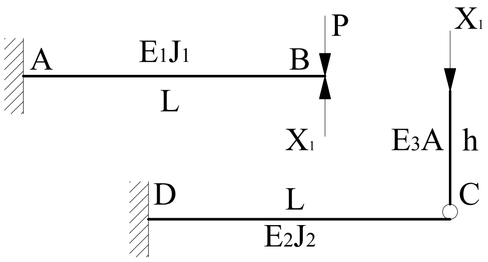
$$\eta_{10} = -\frac{PL_1^3}{48E_1J_1}; \qquad \eta_{11} = \frac{L_1^3}{48E_1J_1} + \frac{L_2^3}{48E_2J_2}$$

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = P \cdot \frac{\dfrac{L_1^3}{48E_1J_1}}{\dfrac{L_1^3}{48E_1J_1} + \dfrac{L_2^3}{48E_2J_2}}$$

Esempio 3

- caso 1: la forza P è applicata nel punto B

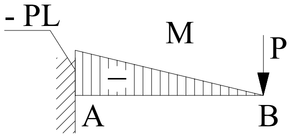


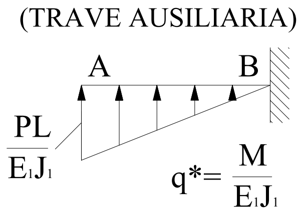


$$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} \cdot X_1;$$

$$\eta_1 = 0; \quad X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}}$$

Determiniamo η_{10} per esempio con le analogie di Mohr





$$\eta_{10} = -M_B^* = -\frac{PL}{E_1J_1} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2L}{3} = -\frac{PL^3}{3E_1J_1}$$

in modo analogo si può determinare η_{11}

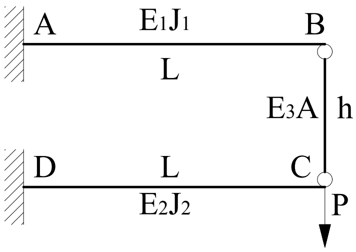
$$\eta_{11} = 1 \cdot \frac{L^3}{3E_1J_1} + 1 \cdot \frac{h}{E_3A} + 1 \cdot \frac{L^3}{3E_2J_2}$$

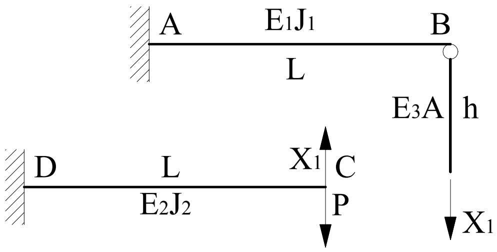
$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{\dfrac{PL^3}{3E_1J_1}}{\dfrac{L^3}{3E_1J_1} + \dfrac{L^3}{3E_2J_2} + \dfrac{h}{E_3A}}$$

$$P - X_1 = \frac{P \cdot \left(\frac{L^3}{3E_2J_2} + \frac{h}{E_3A} \right)}{\frac{L^3}{3E_1J_1} + \frac{L^3}{3E_2J_2} + \frac{h}{E_3A}}$$

Il rapporto tra X_1 e $P - X_1$ è dato da: $$\frac{X_1}{P - X_1} = \frac{\frac{L^3}{3E_1J_1}}{\frac{L^3}{3E_2J_2} + \frac{h}{E_3A}}$$

- <u>caso 2 : la forza P è applicata nel punto C</u>





$$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} \cdot X_1;$$

$$\eta_1 = 0; \quad X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}}$$

(vedi caso precedente)

$$\eta_{10} = -\frac{PL^3}{3E_2J_2}; \qquad \eta_{11} = \frac{L^3}{3E_1J_1} + \frac{h}{E_3A} + \frac{L^3}{3E_2J_2}$$

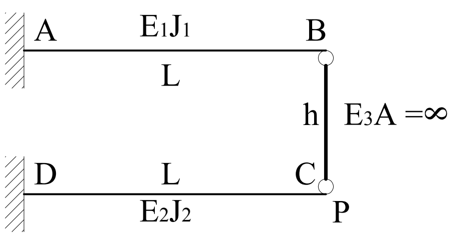
$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{\frac{PL^3}{3E_2J_2}}{\frac{L^3}{3E_1J_1} + \frac{L^3}{3E_2J_2} + \frac{h}{E_3A}}$$

$$P - X_1 = \frac{P \cdot \left(\frac{L^3}{3E_1J_1} + \frac{h}{E_3A} \right)}{\frac{L^3}{3E_1J_1} + \frac{L^3}{3E_2J_2} + \frac{h}{E_3A}}$$

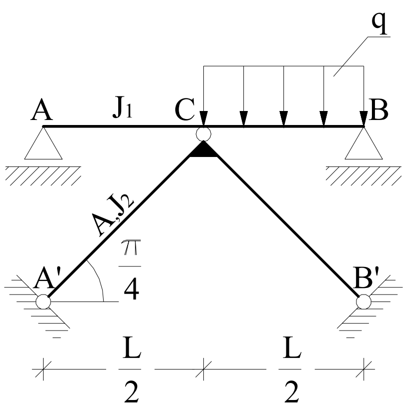
Il rapporto tra X_1 e $P - X_1$ è divesro dal caso (1), infatti è dato da: $$\frac{X_1}{P - X_1} = \frac{\frac{L^3}{3E_2J_2}}{\frac{L^3}{3E_1J_1} + \frac{h}{E_3A}}$$

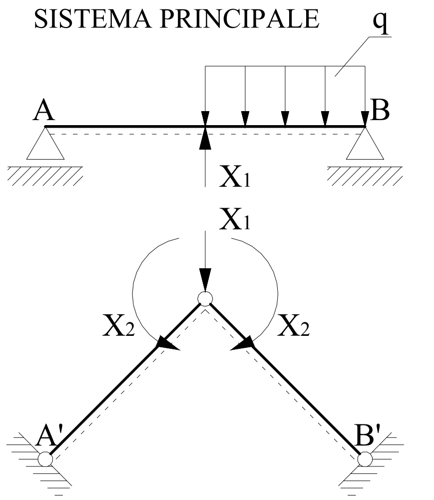
<u>Caso particolare</u>: $E_3A = \infty$

I due problemi vengono a coincidere. Le due mensole si ripartiscono il carico P in base alla loro rigidezza.



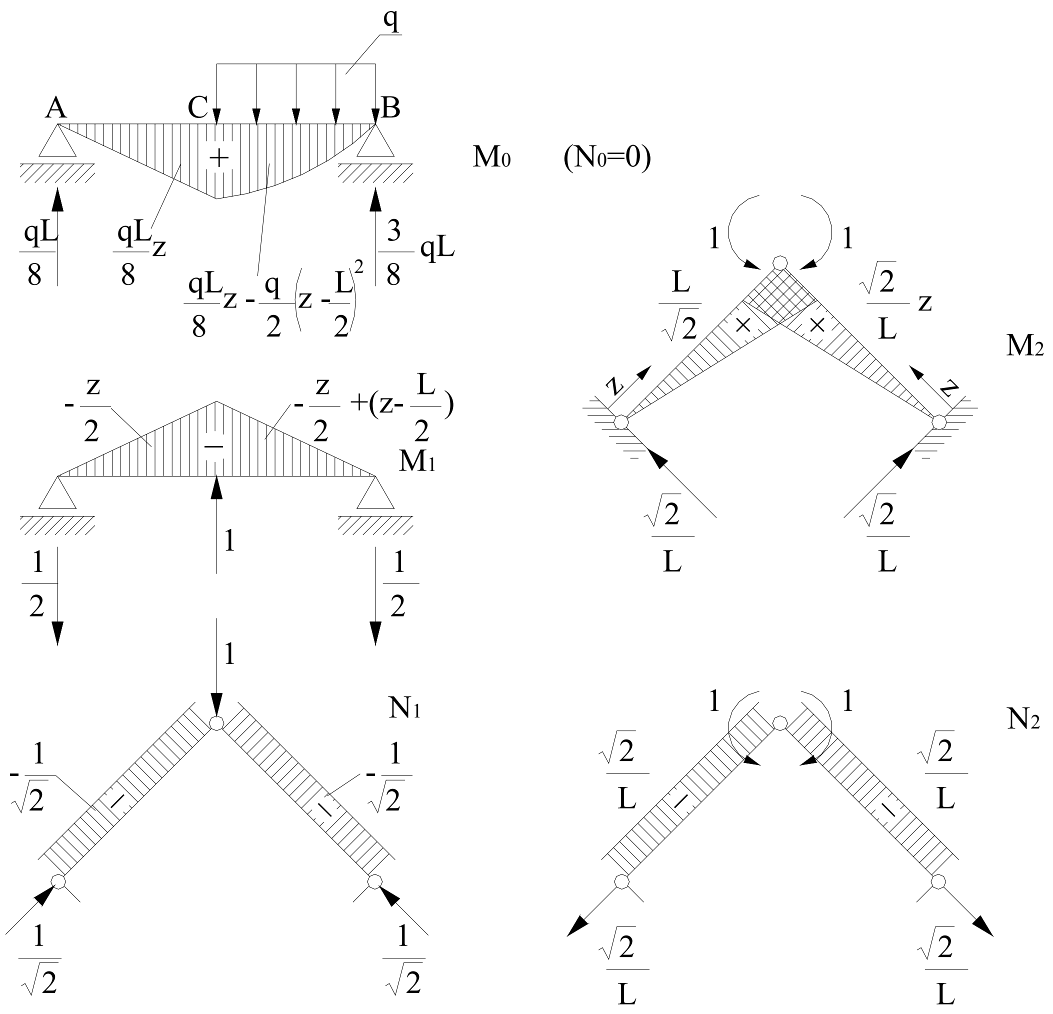
Esempio 4 - Struttura due volte iperstatica.

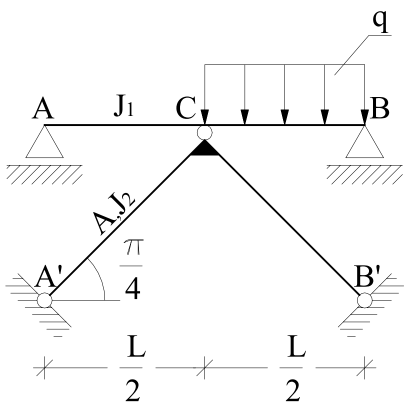




Equazioni di Müller-Breslau

$$\begin{cases} 0 = \eta_{10} + \eta_{11} \cdot X_1 + \eta_{12} \cdot X_2 \\ 0 = \eta_{20} + \eta_{21} \cdot X_1 + \eta_{22} \cdot X_2 \end{cases}$$





	N_0	M_0	N_1	M_1	N_2	M_2
AC	0	$\dfrac{qLz}{8}$	0	$-\dfrac{z}{2}$	0	0
CB	0	$\dfrac{qLz}{8}-\dfrac{q}{2}\cdot\left(z-\dfrac{L}{2}\right)^2$	0	$-\dfrac{z}{2}+1\cdot\left(z-\dfrac{L}{2}\right)$	0	0
A'C	0	0	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{L}$	$\dfrac{\sqrt{2}\cdot z}{L}$
B'C	0	0	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{L}$	$\dfrac{\sqrt{2}\cdot z}{L}$

Eseguendo i calcoli si ottiene :

$$\eta_{10}=-\frac{5qL^4}{768EJ_1}\,;\ \eta_{20}=0\,;\ \eta_{11}=\frac{L^3}{48EJ_1}+\frac{L}{EA\sqrt{2}}\,;\ \eta_{12}=\eta_{21}=\frac{\sqrt{2}}{EA}\,;\ \eta_{22}=\frac{2\sqrt{2}}{LEA}+\frac{\sqrt{2}L}{3EJ_2}$$

e risolvendo il sistema delle due equazioni di Müller-Breslau:

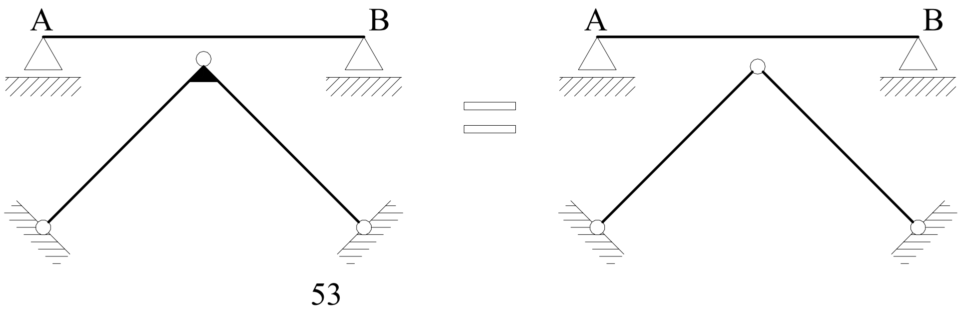
$$X_1=\left(\frac{5\sqrt{2}\,qL^3}{768AJ_1}+\frac{5\sqrt{2}}{2304}\frac{qL^5}{J_1J_2}\right)\Bigg/\left(\frac{2\sqrt{2}\,L^2}{48AJ_1}+\frac{\sqrt{2}\,L^4}{144J_1J_2}+\frac{L^2}{2AJ_2}\right)$$

$$X_2=-\frac{5\sqrt{2}}{768}\frac{qL^4}{AJ_1}\Bigg/\left(\frac{2\sqrt{2}\,L^2}{48AJ_1}+\frac{\sqrt{2}\,L^4}{144J_1J_2}+\frac{L^2}{2AJ_2}\right)$$

nel caso particolare di deformazione assiale trascurabile ($EA=\infty$), si ha:

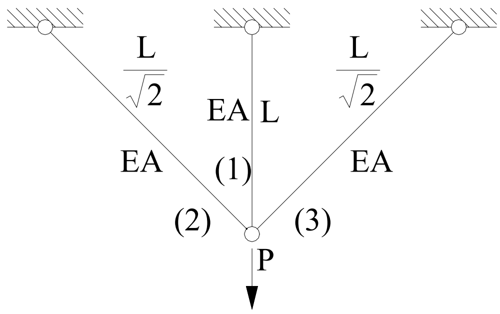
$X_1=\dfrac{5}{16}qL\,,\ X_2=0\,.$

Ne risulta, in tal caso:



IL METODO DELLE FORZE E IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI - ESEMPI

Strutture iperstatiche – esempio 1

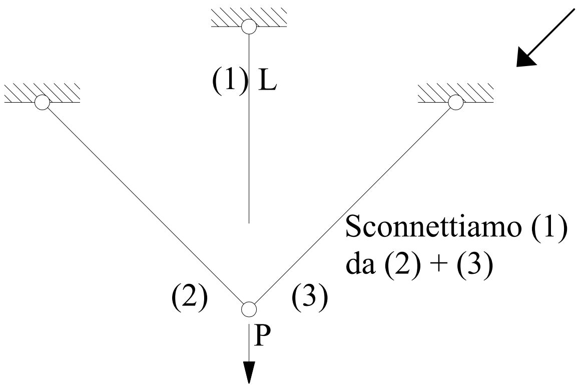


Aste di uguale sezione e materiale (EA=cost.)

- Equilibrio: le forze normali nelle 3 aste devono avere risultante P nel nodo
- Congruenza: gli allungamenti delle 3 aste devono avere lo stesso spostamento nel nodo

METODO DELLE FORZE | METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMA PRINCIPALE



Forza normale in (2) e (3): $P/\sqrt{2}$

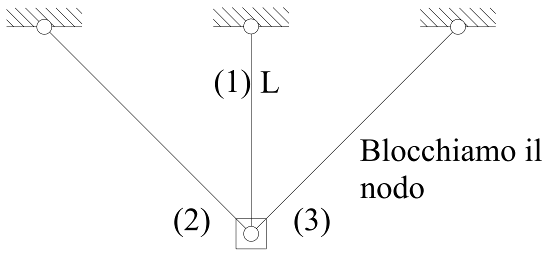
Spostamento del nodo appartenente a

(2)+(3)): $\frac{P}{\sqrt{2}}\frac{L\sqrt{2}}{EA}\cdot\sqrt{2} = PL\sqrt{2}/EA$

Forza normale in (1): 0

Spostamento del nodo (appartenente a (1)): 0

- Spostamento relativo fra (1) e (2)+(3): $PL\sqrt{2}/EA$ (anziché 0)
- Violata la congruenza

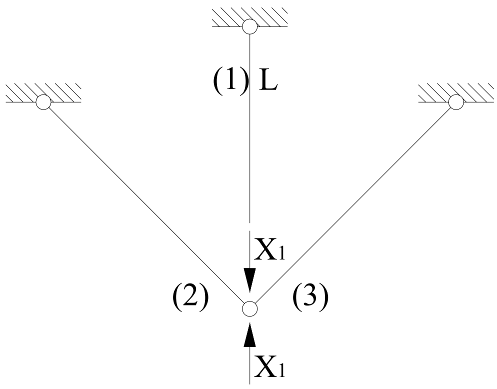


Allungamenti delle aste: 0

Forza normale nelle aste:0

- Forza trasmessa dalle aste al nodo:0 (anziché P)
- Violato l’equilibrio

METODO DELLE FORZE



Recuperiamo la congruenza applicando un'iperstatica X_i che produca uno spostamento relativo fra (1) e (2)+(3) il quale, sommato a quello prodotto da P dia il valore effettivo (zero)

Equazione di congruenza (Müller-Breslau)

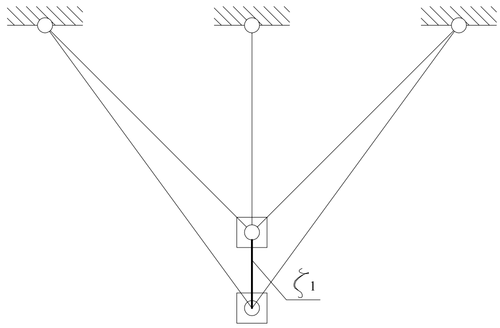
$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$

η_1 =spostamento relativo del nodo (0)

η_{10} =spostamento relativo nel nodo nel sistema principale, dovuto al carico

η_{11} = spostamento relativo nel nodo nel sistema principale, dovuto a $X_1 = 1$

METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Recuperiamo l'equilibrio imponendo al nodo uno spostamento ξ_1 che deformi le aste in modo da generare in esse forze normali la cui risultante produca nel nodo una forza uguale a quella effettiva (P)

Equazione di equilibrio (Clebsch,…)

$R_1 = R_{10} + R_{11} \xi_1$

R_1 = forza nel nodo (P)

R_{10} = forza trasmessa al nodo dalle travi, nel sistema principale a nodi bloccati, dovuto al carico agente sulle travi

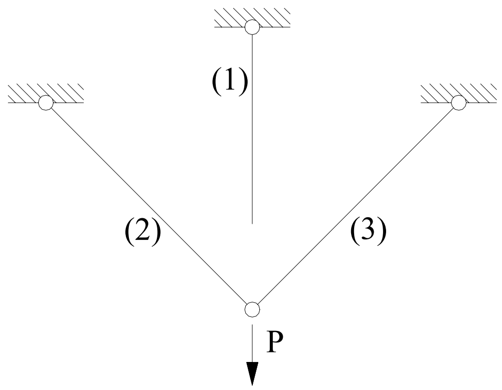
R_{11} = forza trasmessa al nodo dalle travi, nel sistema principale, dovuta a $\xi_1 = 1$ imposto al nodo.

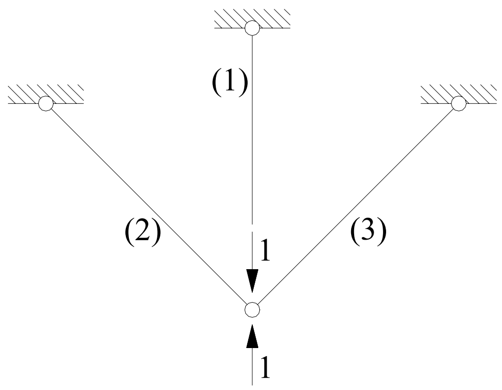
METODO DELLE FORZE

$$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$$

$$\eta_1 = 0\,;$$

$$\eta_{10} = \int_S \frac{N_1 N_0}{EA} ds\,;\ \eta_{11} = \int_S \frac{N_1^2}{EA} ds$$





	N_0	N_1	$N_1 N_0$	N_1^2
(1)	0	1	0	1
(2)	$P/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-P/2$	$1/2$
(3)	$P/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-P/2$	$1/2$

$$\eta_{10} = \int_S \frac{N_1 N_0}{EA} ds = \frac{1}{EA}\left(0 - 2\cdot\frac{P}{2} L\sqrt{2}\right) = -\frac{PL\sqrt{2}}{EA}$$

$$\eta_{11} = \int_S \frac{N_1^2}{EA} ds = \frac{1}{EA}\left(L + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot L\sqrt{2}\right) = \frac{L}{EA}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

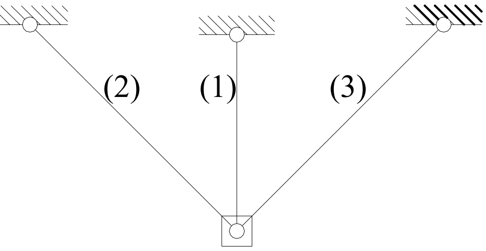
$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = P\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

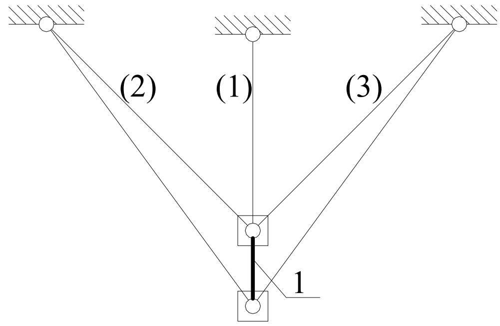
METODO DEGLI SPOSTAMENTI

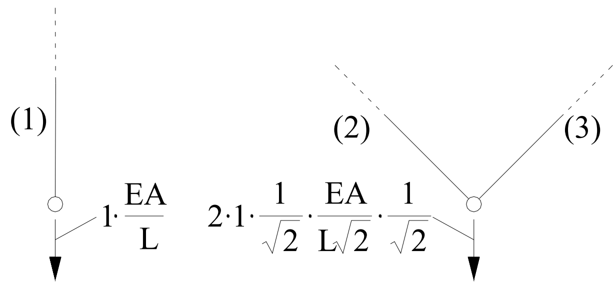
$$R_1 = R_{10} + R_{11}\xi_1$$

$$R_1 = P$$

$R_{10} = 0$







$$R_{11} = \frac{EA}{L} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{EA}{L\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{L}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\xi_1 = \frac{R_1}{R_{11}} = P\frac{L}{EA}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$N_1 = \frac{EA}{L}\xi_1 = \frac{EA}{L} P \frac{L}{EA}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = P\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$(= X_1)$$